N° 33 – 1990

CAHIERS D'HISTOIRE & DE PHILOSOPHIE DES SCIENCES

nouvelle série

Giovanna Cleonice Cifoletti

La méthode de Fermat : son statut et sa diffusion

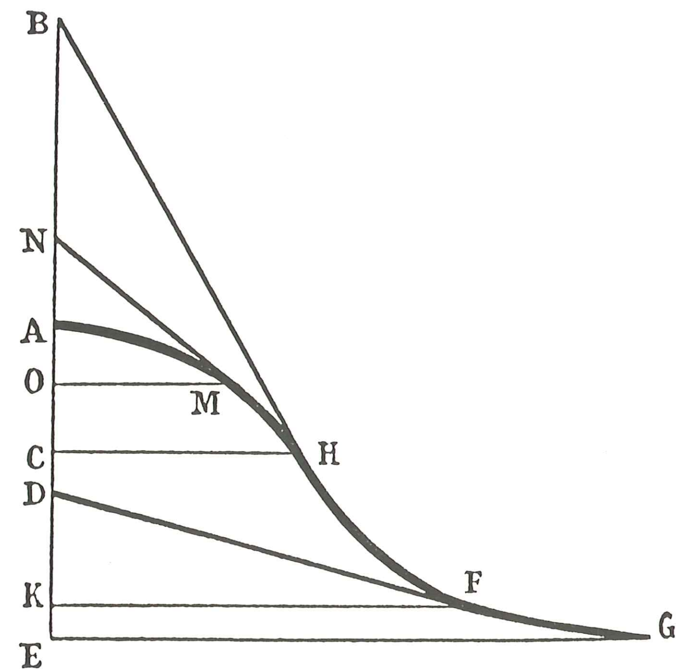
SOCIÉTÉ FRANÇAISE D'HISTOIRE DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES

Cahiers diffusés par BELIN
8, rue Férou
75278 PARIS CEDEX 06
Tél. 1-46-34-21-42

Giovanna Cleonice CIFOLETTI

La méthode de Fermat: son statut et sa diffusion

Algèbre et comparaison de figures dans l'histoire de la méthode de Fermat



a Mariuccia Tanner Cifoletti

Sommaire

Ce travail est une étude sur la méthode de Fermat pour le maximum et minimum. Fermat en parlait comme s'il s'agissait d'une méthode, mais il n'expliqua que quelques procédures. Nous reprenons les différentes procédures de Fermat et nous essayons de déterminer leur statut en tant que méthode. Celle-ci a, d'après Fermat, deux fondements: l'observation de Pappus à propos des extrêma et la *syncrisis*, ou comparaison entre équations quadratiques: la technique qui en découle fait usage de l'accroissement et de l'*adaequatio* (en termes modernes, f(a+e) *adégal à* f(a)). Autrement dit, Fermat élabore l'expression algébrique de la comparaison de figures autour de l'extrêmum. La définition de la méthode de Fermat dépend égalememnt de sa diffusion parmi les contemporains, ainsi que de sa tradition parmi les savants. Nous parcourons donc les étapes de la transformation de la méthode, en privilégiant le ***Cursus mathematicus*** de Pierre Hérigone et la tradition de Van Schooten et Huygens, dont le rôle dans la diffusion de la méthode est mis en évidence par les nouveaux tomes de la ***Correspondance de Mersenne***. En guise de conclusion, nous comparons la méthode de Fermat avec l'approche aux questions d'extrêma d'une théorie contemporaine, la géométrie différentielle synthétique, qui se réclame de Fermat.

AVANT-PROPOS

Ce travail est une étude historique et philosophique de la méthode de Fermat. La matière est constituée par les textes et des documents, ainsi que des renseignements sur Fermat et ses mathématiques. Pourtant, les questions posées ici serons des questions de philosophie des mathématiques et d'histoire de la philosophie.

Il n'y a peut-être pas de partie de l'histoire des mathématiques qui ait suscité l'intérêt philosophique autant que le calcul infinitésimal. Et cela pour deux raisons liées entre elles: la tradition philosophique au sujet de l'infini et la particularité du calcul infinitésimal de traiter des problèmes physiques. D'autre part, s'il s'agit de reconstruire les origines du calcul infinitésimal, Fermat et ses techniques dites "différentielles", ou "sa méthode", comme il l'appelait, en ont toujours été considérés comme le point de départ.

Cependant, dès la première lecture des textes l'on s'aperçoit que les mathématiques de Fermat ne sont pas du calcul infinitésimal, sinon rétrospectivement. Par conséquent, le travail philosophique sur l'oeuvre de Fermat ne peut pas suivre le chemin connu de la discussion sur l'infini ou sur la portée physique des mathématiques. L'approche qui paraît promettre des alternatives est plutôt de tenir compte du projet de Fermat lui-même. Son projet est un développement du programme analytique de Viète et de la *Logistica speciosa*, c'est-à-dire l'application de l'algèbre symbolique de Viète non seulement à la géométrie classique, mais à tous les problèmes mathématiques, en développant en même temps la théorie des équations. Cela suggère comme première tâche philosophique celle de comprendre cette pensée algébrique sur la géométrie, qui ne consiste pas exclusivement de procédures ou de résultats algébriques, mais d'un style mathématique commun à Fermat et à ses interlocuteurs. Ce style s'est particularisé chez Fermat et, plus précisément, la *méthode* de Fermat semble relever surtout d'une manière algébrique de poser les problèmes, d'une habileté à comparer les figures géométriques, d'une manipulation algébrique qui exprime cette comparaison, et finalement d'une souplesse de la rhétorique démonstrative qui puisse intégrer tous ces aspects sinon en une synthèse, au moins en une analyse.

J'appelle donc cette recherche une tâche philosophique pour deux raisons: la première, parce qu'elle implique une interrogation philosophique sur le rapport entre algèbre et géométrie, car c'est ainsi qu'il faut interpréter le sous-titre. En deuxième lieu, parce qu'elle partage avec l'historiographie philosophique le but de comprendre des débats sur la méthode en termes des outils théoriques et scientifiques à la disposition des auteurs qui développaient ces débats.

Le titre définit le but historiographique de travail, qui est la reconstruction du statut de la méthode de Fermat chez l'auteur lui-même et chez ses contemporains, ainsi que la tradition qui se créa autour de cette méthode. Le statut des procédures de Fermat en tant que méthode sera étudié d'abord comme évolution de la formulation des procédures, ensuite comme relation et conditionnement réciproques du domaine d'application des procédures et des procédures elles-mêmes, car il s'agit d'une période où la définition des problèmes ainsi que de leur solution changeait très rapidement en mathématiques. En particulier, je prendrai au sérieux les affirmations de Fermat, selon lesquelles sa *méthode* pouvait servir à résoudre des problèmes très différents, et non traditionnellement reliés. Autrement dit, Fermat avait des ambitions au sujet de sa *méthode* en tant que méthode, et il mériterait d'être jugé sur ce terrain. Et cela ne nous intéresse pas seulement pour réexaminer les modalités de sa compétition avec Descartes, mais parce que ce sujet nous renvoie, du point de vue mathématique, à l'unification des questions qui constituèrent ensuite les problèmes du calcul différentiel et intégral, et, philosophiquement, à la question de la méthode, en relation avec le développement de l'algèbre symbolique et de la théorie des équations.

Le rapport entre algèbre et géométrie dans le cas de la méthode de Fermat, en tant qu'articulation de la pensée algébrique, sera vu non seulement pour reconstruire le cheminement de son auteur, mais avec une attention particulière pour retracer ce que les contemporains de Fermat comprenaient ou du moins pouvaient comprendre de son approche.

Spécifiquement, deux personnages paraîtront au premier plan, l'un bien connu mais peu étudié dans ses relations avec Fermat, c'est-à-dire Christiaan Huygens, et l'autre célèbre seulement dans son temps, Pierre Hérigone. Hérigone fut responsable de la publication de la méthode de

Fermat, ce qui ne signifie pas en priorité la diffusion des techniques, qui avaient été présentées aux mathématiciens parisiens et communiquées par lettre aux mathématiciens étrangers, mais avant tout la mise au point d'une forme canonique de la méthode, et une codification de son rôle en algèbre. Quant à Christiaan Huygens, il fut celui qui, à la suite de son maître Van Schooten, prit la méthode de Fermat comme ce que nous appellerions un programme de recherche, et, en grand mathématicien, parvint à la diffuser ultérieurement et à la transformer.

Nous conclurons ce travail par une comparaison plus strictement théorique. Léon Brunschvicg écrivait qu'il n'y a peut-être pas de pages dans l'histoire de la pensée scientifique aussi commentées que celles de la ***Methodus ad disquirendam maximam et minimam*** de Fermat. Par rapport à ce texte, on a assimilé les problèmes de justification logique des procédures de Fermat à la "métaphysique du calcul infinitésimal" du XVIIIe siècle, jusqu'au problème de la "rigueur" en analyse, de Cauchy à l'arithmétisation et aux fondements des mathématiques au sens contemporain. En somme, Fermat, par ses procédures algébriques sur le continu aurait abordé le problème de l'infini des temps modernes. Ce présupposé est un lieu commun partagé tant par ceux qui voient les procédures de Fermat comme dépassées en tant que telles dans leur cadre théorique, mais assimilé dans l'analyse, que par ceux qui retrouvent son sens et son fonctionnement. L'étude de la *méthode* de Fermat offre certes l'avantage de montrer le début de ce processus. Le deuxième moment de ce travail sera donc l'étude de la notion de dérivée et de maximum ou minimum dans une théorie du vingtième siècle, la géometrie différentielle synthétique,[1] qui fait remonter à Fermat sa procédure de différentiation. L'intérêt de traiter ce sujet dans ce contexte est dû, d'une part, à la possibilité de voir le rapport algèbre-géométrie dans une théorie contemporaine qui fait de ce rapport sa motivation philosophique principale; d'autre part, au fait que la théorie mathématique en question a développé une présentation du calcul différentiel qui peut être considérée plus proche de l'intuition géométrique propre du premier calcul infinitésimal.

[1]Je renvoie, pour une présentation générale, au texte de Anders Kock [147].

Le fait de juxtaposer deux fragments de théories mathématiques séparés par plus de trois cent cinquante ans peut paraître au moins naïf. Néammoins, je crois pouvoir montrer comment cela ne constitue pas un problème et je suppose que, une fois établie la légitimité de cette approche, on ne pourra que s'intéresser à la lumière que ces deux "discours" peuvent faire l'un sur l'autre.

L'histoire des mathématiques a constitué pour longtemps le rempart de l'histoire rétrospective, et ce "continuisme" est dû aussi à des caractères que la connaissance mathématique possède effectivement. Je pense cependant qu'il n'est pas nécessaire de partager ce point de vue pour admettre qu'une étude sur le passé rend explicite ses références contemporaines, non pas pour développer une comparaison à tout niveau, qui ne serait pas fondée et amènerait à des absurdités, mais pour mettre en évidence les suppositions de la recherche historique elle-même. Il faut par exemple s'entendre sur ce qu'est l'algèbre, avant d'écrire un texte sur l'histoire de l'algèbre. Cette nécessité a donné lieu il y a quelques temps à la célèbre polémique sur la soi-disant "algèbre géométrique" des Grecs, entre Unguru, Van den Waerden, Freudenthal et d'autres. Mahoney, dans un travail important de 1970 [114], a donné une réponse à la question "qu'est-ce que l'algèbre", ou du moins "qu'est-ce que la pensée algébrique" en énumérant les aspects suivants: un symbolisme opératif, un point de vue qui privilégie les relations plutôt que les objets, l'abandon d'engagements ontologiques. Cette caractérisation efficace est particulièrement utile pour souligner que non seulement notre jugement sur les mathématiques du passé est déterminé par notre conception du domaine en question, mais aussi que ce que nous cherchons dans l'histoire de la discipline est normalement très éloigné de ce que que les auteurs étudiés auraient considéré comme principal ou même approprié. Je ne nie pas ici que cette description exprime très précisément et très raisonnablement ce qui peut se demander d'une pensée algébrique, ou qu'elle vienne d'un des principaux représentants d'une histoire des mathématiques non rétrospective, mais interprétée à la lumière du contexte culturel. Ce que je remarque est seulement qu'il s'agit d'une caractérisation que nous pouvons partager en partant de nos connaissances des mathématiques et de la philosophie des mathématiques de ce siècle, mais

que ni Fermat, ni Descartes, ni Van Schooten ne l'auraient appréciée. Au delà de leurs différences, ces trois auteurs seraient tous probablement d'accord pour affirmer que l'algèbre est la logistique des espèces, et que son but est la solution des problèmes moyennant l'étude des équations, c'est-à-dire un calcul où l'on applique des techniques, d'abord pour mettre le problème en équation et ensuite pour transformer et résoudre l'équation du problème. Si, de plus, nos trois auteurs devaient généraliser cela à une pensée algébrique transhistorique (et en effet ils se trouvèrent en quelque sorte devoir répondre à cette question, en ce qu'ils devaient définir leur entreprise par rapport à l'analyse grecque, à l'origine de l'algèbre, et à la possible algèbre géométrique grecque), ils diraient que ce qui rend leur discipline affine à celle de Diophante est l'usage des "notes" (les symboles), la représentation d'un problème en équation et les techniques de manipulation et solution des équations. Ce qui semble central au lecteur du XXe siècle à la recherche de ses origines intellectuelles - la généralité et l'abstraction par rapport à un contenu spécifique - n'était pas entendu primairement comme possibilité d'appliquer l'algèbre à des problèmes numériques autant qu'à des problèmes géométriques mais plutôt comme symbolisme efficace pour la construction d'une théorie des équations qui aille au delà de la simple classification. Par conséquent, si le premier caractère, le symbolisme opératif, était unanimement reconnu par nos auteurs comme critère fondamental et enrichi des significations philosophiques attachées au symbolisme universel lullien, le privilège de l'étude des relations ne pourrait être compris, comme le remarque Mahoney lui-même, que s'il était précisé par rapport à la nouvelle notion et théorie des équations. Ou encore, il pourrait se préciser par rapport à la nouvelle notion de nombre, comme l'a montré Jacob Klein [111]. Le troisième critère, par contre, n'aurait pas de place chez les mathématiciens du XVIIe siècle, à mon avis, car l'exigence principale pour ces auteurs était de corriger ou de remplacer l'ancienne vision du monde et non pas de négliger, dans le discours mathématique, toute vision du monde comme secondaire. L'idée que les mathématiques sont indépendantes de la physique est employée, du moins entre le XVIe et le XVIIe siècle, seulement par rapport à cette exigence principale[2] et, au contraire, beaucoup d'auteurs fondent la science mathématique de la nature en insistant sur le rapport entre le mathématisme épistémologique et la réalité physique. Car le scepticisme s'applique justement à toute connaissance à l'exclusion des mathématiques. Quant à l'ontologie proprement mathématique, cela constituait l'intermédiaire pour la connaissance de toute réalité, physique et métaphysique, et par conséquent l'on ne pouvait pas y renoncer.

Au sujet des critères de la pensée algébrique, ce que je veux souligner est que déjà au niveau des critères de définition d'une discipline on applique le point de vue de la discipline plus développée. Le fait de mettre en contraste deux moments différents de la discipline pour mieux remarquer les affinités et les différences a donc au moins l'avantage de poser explicitement le problème de traduction entre les deux contextes. En ce qui concerne l'histoire de la philosophie, je suis consciente que ce que j'ai déjà affirmé et ce qui sera parfois remarqué au sujet de Descartes n'est pas explicitement justifié par rapport à l'historiographie sur Descartes. Mais ceci n'est pas une recherche sur Descartes et ce que je dirai à son son sujet ne veut pas, bien entendu, remplacer les études qui soulignent d'autres aspects, peut-être opposés, de l'approche de Descartes aux rapports algèbre–géométrie. En particulier, je ne peux même pas aborder, dans ce contexte, une discussion à propos de l'ouvrage de Descartes le plus pertinent à ce sujet, ***Regulae ad directionem ingenii***, et de sa conception des mathématiques[3]. Tout en renvoyant à un essai déjà paru [93], je peux cependant déclarer que mon point de départ est constitué par le travail de Marion [116] d'un côté et de Schuster [122] de l'autre. Cela implique, plus précisément, que, suivant Schuster, je ne donnerai pas un rôle central à la *mathesis universalis*[4]

[2]Voir par exemple Kepler, ***Apologia pro Tychone contra Ursum***, maintenant dans [110].

[3]Voir à ce sujet les essais classiques de Costabel parus dans [94].

[4]Il faudrait, bien sûr, s'entendre sur l'usage du terme, qui fut employé des sens plus ou moins strictes entre la fin du XVIe et le début du XVIIe siècle. Il s'agit d'une tradition très variée, pour l'étude de laquelle le point de départ est l'essai classique de Crapulli,

comme s'il s'agissait du projet scientifique réalisé par le calcul des longueurs des ***Regulae*** d'abord, ensuite par le ***Discours*** et ses essais, c'est-à-dire la philosophie mathématique de la nature. C'était l'interprétation de Milhaud reprise dans d'autres perspectives par l'historiographie, et récemment critiquée par Schuster. Selon ce dernier les ***Regulae*** ont été composées à trois reprises; la ***mathesis universalis*** représente la première couche et doit être interprétée au sens plus typique du XVIe siècle, comme dans la règle IV. Par contre, le calcul des longueurs dans sa version plus développée est la troisième couche et n'a pas d'héritage dans la suite de la recherche de Descartes. Enfin seule la partie centrale des ***Regulae*** serait le point de départ de l'approche du ***Discours***, une première phase de l'épistémologie cartésienne. Cette chronologie est particulièrement intéressante pour reconstruire les traditions de pensée algébrique qui étaient disponibles à l'époque de Descartes, et ce travail veut être une contribution par rapport à ce but. D'autre part, suivant Marion, je situe dans le ***Regulae*** l'indication du projet algébrique de Descartes, qui prend l'équation comme l'outil de la nouvelle logique, capable de remplacer la proposition aristotélicienne et l'ontologie sous-jacente ainsi que d'étendre à toutes les sciences mathématiques la certitude de l'arithmétique et de la géométrie. J'ajoute pourtant à cette perspective le fait de reconnaître dans la centralité de l'équation le résultat de la tradition algébrique française et l'origine de la nouvelle définition de la *quaestio*. J'ai essayé de montrer ailleurs que le problème scientifique dans sa forme générale est vu comme une équation et en acquiert la structure et que l'algèbre ne fournit pas seulement un instrument de solution de problèmes mais induit un redéfinition de la notion même de problème scientifique. Autrement dit, l'identification entre *quaestio* et *aequatio*, présentée par Descartes comme un point d'arrivée dans les *Regulae*, est plutôt pour lui un point de départ. On peut le voir en étudiant les manuels algébriques de la tradition française. Dans ces manuels on retrouve en effet d'abord la formation de la notion d'équation qui deviendra courante au XVIIe; en outre, la distinction entre problèmes (de mathématique classique) et questions (commerciales ou de toute discipline

[95].

mathématique). Descartes à son tour donne à la notion de problème-équation le statut d'instrument de toute connaissance.

En conclusion, ici Descartes sera vu seulement comme mathématicien[5], tandis que de Fermat on soulignera les aspects plus "philosophiques".

Pierre Raymond, en traitant brièvement de la *méthode* de Fermat [118], affirma que le rapport de la philosophie avec le calcul infinitésimal peut être décrit en termes de "formes négatives de fonctionnement". Autrement dit, le calcul infinitésimal s'est servi de la philosophie comme référence de justification, et pour pouvoir ainsi ne s'occuper que des questions mathématiques; quand il fut suffisamment développé, il s'en débarrassa.

Je crois que de ce point de vue Fermat n'appartient pas à l'histoire du calcul infinitésimal, puisqu'il n'a pas de référence à l'infini privée de justification. Il appartient plutôt à la tradition algébrique française (Borrel, Gosselin, Viète), en ce sens qu'il travaille uniquement en mathématiques, mais il approfondit en même temps le sujet et ses fondements, la géométrie et l'algèbre.

Il s'agit maintenant de mettre en évidence ce qu'il y a de nouveau dans notre recherche.

1) Le but de ce travail est de clarifier le statut des procédures de Fermat en tant que méthode, et le rapport existant entre algèbre et géométrie mis en évidence par cette notion de *méthode*. Mon approche diffère des précédentes de deux façons: premièrement, je ne place pas le début de la géométrie analytique au premier plan du nouveau rapport entre algèbre et géométrie mais plutôt le vaste projet de la *Logistica speciosa*, c'est-à-dire l'algèbre symbolique et la théorie des équations. Deuxièmement, mon approche prend au sérieux Fermat lorsqu'il affirme posséder une méthode. Beaucoup d'historiens ont simplement essayé d'établir une version de la procédure des maxima et minima, la considérant comme "principale". Mon

[5]Dans cette perspective, nos références fondamentales sont les études de Henk Bos sur la construction des équations et sur les courbes (en particulier [89] et l'essai de E. Giusti ***La 'Géométrie' di Descartes tra numeri e grandezze***, "Giornale critico della Filosofia Italiana, III 1987.

projet veut tenir compte de la multiplicité des procédures et de ce fait essaie d'établir le projet global de la *méthode* de Fermat.

Du point de vue des applications, cette *méthode* traite des tangentes, des normales, des points d'inflexion, mais en outre donne une solution au problème difficile du ***De locis planis***, à un autre des parties aliquotes et permet de trouver le centre de gravité de quelques figures. Du point de vue conceptuel, elle introduisit la possibilité d'un nouveau domaine des mathématiques, constitué avant tout par l'ensemble des problèmes des conditions limites (*diorismòi*), mais aussi par ceux qui peuvent être réduits aux précédents. Ce domaine des mathématiques ne s'est développé que très partiellement dans l'oeuvre de Fermat et de ses continuateurs Van Schooten et Huygens, mais il reste un élément important de la mentalité mathématique de l'époque.

2) J'essaie de rendre compte du projet de Fermat à partir de données qui sont à notre disposition sous forme d'exemples.

3) J'examine l'exposé de Beaugrand et les commentaires de quelques contemporains qui sont maintenant rendus accessibles par la publication des trois derniers volumes de la ***Correspondance de Mersenne***.

4) J'examine dans le détail la méthode de Fermat publiée par Hérigone, ainsi que son projet d'une langue universelle pour toutes les mathématiques, projet dérivé, autant que celui de Fermat, de la logistique spécieuse de Viète. En outre, j'étudie la diffusion de la méthode de Fermat, montrant comment Hérigone est la source principale de la méthode de Fermat.

5) J'analyse quelques éléments de la tradition Fermat-Van Schooten-Huygens, et j'examine l'interprétation que quelques grands mathématiciens ont donné de la méthode de Fermat.

6) Finalement, je traite de la Géométrie différentielle synthétique en relation avec la méthode de Fermat, montrant comment les "infiniment petits" de Fermat ne coïncident pas avec la notion de nilpotent (élément dont les puissances sont égales à zéro, et qui est donc "petit") que nous possédons; je montre par ailleurs comment le contexte géométrique de la recherche de Fermat permet de reconnaître quelques affinités entre son approche et celle de la géométrie différentielle synthétique.

CHAPITRE I

LA METHODE OU LA PROCEDURE DE MAXIMA ET MINIMA

Première partie: les versions de la procédure

Ce premier chapitre contient les différentes versions de la procédure de Fermat pour la détermination des maxima et minima. Cela fournira la base de notre discussion sur le statut des procédures de Fermat en tant que *méthode* ainsi que sur leur diffusion.

Chacune des quatre versions sera présentée d'abord dans une nouvelle traduction du texte original et ensuite, brièvement, sous forme algorithmique, dans le but de rendre les différentes versions plus comparables entre elles et de permettre une compréhension des différents aspects impliqués, en termes modernes. L'algorithme sera suivi par quelques explications historiques.

Dans la deuxième partie, nous prendrons en considération les problèmes critiques principaux étudiés dans la littérature sur la *méthode* de Fermat.

1. La version de la *Methodus*.

Dans la *Methodus* (écrit dont le titre complet est ***Methodus ad disquirendam maximam et minimam***) datée du mois de décembre 1637, Fermat écrit:

> Toute la doctrine sur la détermination du maximum ou du minimum est fondée sur deux expressions symboliques et sur ce seul précepte: l'on pose qu'un certain terme de la question soit A (que cela soit un plan, un

solide, ou une longueur, ce qui dépend duquel est approprié à satisfaire le problème) et, ayant trouvé le maximum ou le minimum en termes contenant A ou des puissances de A, on recommence en exprimant le même terme par A+E, et l'on trouve de nouveau le maximum ou le minimum en termes contenant A, E et des puissances éventuelles des coefficients de E. On compare par *adéquation*, comme le dit Diophante, les deux homogènes qui sont égaux au maximum ou au minimum et, enlevés les termes communs (après quoi tous les homogènes d'une part et d'autre seront affectés par E ou ses degrés), on applique <on divise ... par> tous les homogènes à E ou à une puissance de E, jusqu'à ce que l'un des homogènes d'une part ou d'autre ne soit plus affecté par E. On néglige donc des deux côtés les homogènes contenant E ou ses degrés, et l'on égale les termes restants; sinon, s'il ne reste rien d'un côté, égaler le terme négatif au terme positif, ce qui revient au même.

La solution de cette dernière égalité donne la valeur de A et, connaissant ce dernier, on obtiendra le maximum ou le minimum en reparcourant les passages de la solution précédente." (O.F.I, pp. 133-134)[1]

La procédure de maxima et minima donnée dans la ***Methodus*** peut se traduire de la façon suivante.

1) Exprimer le problème par une équation en **a**[2].

2) Trouver l'expression de l'extrêmum. Autrement dit, le premier membre doit contenir les termes avec l'inconnue et sera ainsi la quantité dont il faut trouver le maximum ou le minimum.

3) Substituer **a+e** à la place de **a** dans l'expression précédente.

---

[1]Tous les textes de Fermat sont cités dans ma traduction, et fondés sur l'édition de [2]. Les renvois aux écrits de Fermat, toujours dans la même édition, seront indiqués par O.F., tous les autres renvois suivront les codes bibliographiques.

[2]Nous allons employer la notation d'Hérigone (1642) ainsi que de Tannery et Henry, avec les voyelles minuscules pour les inconnues-racines-variables, au lieu de la notation originelle de Viète et Fermat, pour distinguer notre interprétation et pour pouvoir employer la notation fonctionnelle. Par contre, la notation originelle, y compris les termes latins, sera gardée dans les citations.

4) Comparer par *adéquation*, "comme le dit Diophante", les deux expressions qui sont égales au maximum ou au minimum.

5) Eliminer les termes communs et diviser par **e** ou par une puissance de **e** jusqu'à obtenir au moins un terme sans facteur **e**.

6) Effacer les termes qui contiennent encore le facteur **e**. Cette dernière égalité donne la valeur de **a** et l'on pourra obtenir le maximum ou le minimum en remplaçant **a** par sa valeur.

Fermat donne ici un example classique, dont le *diorismòs* est tiré d'Euclide (VI,27), ainsi que sa solution par la *méthode*:

A ________________ E __________ C

Soit à partager la droite AC en E, en sorte que le rectangle AExEC soit maximum. Posons AC aequalis B; soit A un des segments, l'autre sera B - A, et le produit des deux segments sera B in A - A q, dont on doit trouver le maximum. Soit maintenant A + E le premier segment de B, le second sera B - A - E, et le produit des segments

B in A - A q + B in E - A in E bis - E q ;

il doit être *comparé par adéquation* au précédent

B in A - A q. Eliminant les termes communs,

B in E adaequabitur A in E bis + E q.

Divisant tous les termes par E,

B adaequabitur A bis + E.

On supprime E ,

B aequabitur A bis.

Pour résoudre le problème il faut donc prendre la moitié de B . Il est impossible de donner une méthode plus générale. (ibidem)

Remarques

Il s'agit du texte de Fermat qui rendit célèbre sa *méthode* dans le cercle de Mersenne. Ce fut dans cette version que Descartes pris connaissance de la méthode de maxima et minima. Il faudrait peut-être ajouter que cette version rendit célèbre l'obscurité de la *méthode*.

Je soulignerai ici deux points terminologiques à propos des mots "appliquer" et "comparer par (ou établir une) adéquation".

Le terme "appliquer", quoique désuet et moins compréhensible pour le lecteur de notre siècle, n'est pas surprenant en soi puisqu'il fait partie de la terminologie de Viète autant que tous les termes techniques employés dans ce texte: par exemple, on peut remarquer l'usage de "affecté par E " au sens de "avec le facteur E ", et de "homogène" pour "terme" ou de "degré" pour "puissance". "Appliquer" remonte d'ailleurs plus loin dans l'histoire des mathématiques, puisqu'il appartient à la tradition pythagoricienne, absorbée dans les livres II et VI d'Euclide, et reprise et interprétée en termes algébriques par Borrel et La Ramée, entre autres, au XVIe siècle. Cette tradition pythagoricienne de l'"application des aires" est la même qui fut interprétée comme algèbre géométrique chez Euclide par les historiens[3].

Quant à "on compare par *adéquation*", j'ai traduit ainsi le latin *adaequentur*, choisissant la traduction que Fermat donna lui-même dans un des trois textes français où il a été obligé de traduire ce terme. Les trois textes sont la lettre à Mersenne du 20 avril 1638 (O.F.II, p. 135), où Fermat emploie l'expression "je compare par adégalité"; l'écrit ***Je veux par ma***

[3]Sur cette tradition pythagoricienne, voir M. Mahoney [112], ainsi que son article [115].

méthode, dans sa version française, composé entre avril et juin 1638 (O.F. Suppl. pp. 74–83), où Fermat parle de "comparaison per adaequalitatem", et enfin la ***Méthode expliquée***[4], où Fermat écrit "je ... la compare par adéquation". La traduction de Fermat est donc instable, et si je choisis cette dernière solution, c'est à cause de son uniformité avec l'original latin. Le terme n'avait qu'une brève histoire avant Fermat: il fut introduit par Xylander (Wilhelm Holtzmann) dans sa traduction de l'***Arithmétique*** de Diophante, publiée à Bâle en 1575. Diophante avait en effet employé le substantif grec *parisotes* (comparaison) dans quelques problèmes où il avait obtenu des solutions numériques par une technique qui consiste à attribuer une valeur approximée à l'inconnue (dans les équations linéaires), cette substitution permettant d'établir une proportion d'où l'on peut tirer la solution proprement dite. Cette technique était connue avant la redécouverte de Diophante et dans les manuels d'algèbre du début du XVIe siècle elle était considérée parmi les techniques principales en algèbre, identifiée par deux noms: règle du faux et règle de fausse position[5].

Itard[6] remarque que l'on ne retrouve le terme *adaequari* que chez les traducteurs de Diophante et chez Cavalieri, deux fois. La première, dans un scholium de sa ***Geometria indivisibilium***[7]. Le même scholium, cependant,

[4]***Méthode expliquée*** sera ici l'abbréviation pour ***Méthode de maximis et minimis expliquée et envoyée de M.Fermat à M.Descartes***, écrit ajouté à la lettre de Fermat à Mersenne de juin 1638 (O.F.II, pp.154–162) et étudié par Itard; voir [71] et [74].

[5]Diophante introduit ce terme à la proposition XI des éditions modernes, ou à la proposition XIV de l'édition de Bachet. La technique est présente aussi à la proposition IX (ou XII, respectivement).

[6]Voir l'article de Jean Itard [74] ***La lettre de Torricelli à Roberval d'octobre 1643***. Les remarques sur le terme *adaequari* sont à la page 261: les seules attestations dont il est au courant sont les traductions de Diophante et Cavalieri.

[7]Voir [12]. Dans l'édition de 1635, le terme est à la page 17. Dans l'édition de 1653, le terme paraît à la page 111. Cavalieri écrit: "Propter quod innuendum mihi videtur, dum considero omnes lineas, vel omnia plana alicuius figurae, me non numerum ipsarum comparare, quem ignoramus, sed tantum magnitudinem, quae adaequatur spatio ab eisdem lineis occupato."

réapparaît dans ses ***Exercitationes geometricae***, 1647, p.23. Dans les deux cas, il s'agit, pour Cavalieri, de justifier l'usage de *omnes lineae* à la place de l'aire correspondante, donc d'un point crucial, car il explique l'introduction de la première proposition du deuxième livre[8]. Sa formulation est d'abord

> Quand je considère toutes les lignes d'une certaine figure, je n'égalise pas le nombre de ces lignes, que nous ne connaissons pas, avec la figure, mais seulement la grandeur, qui *adaequatur* à l'espace occupé par ces lignes.

Quand Guldin le provoqua à une explication, et en particulier à préciser s'il faut penser à l'espace parcouru par une droite en mouvement ou à une somme de droites, c'est-à-dire à une somme infinie[9], Cavalieri répondit qu'il fallait penser plutôt à l'agrégé des longueurs simples, car la longueur de chaque ligne peut être conçue comme (déterminant) un lieu: il s'agit donc de poser une ***adéquation*** entre la grandeur de toutes ces lignes et la grandeur de tous ces lieux. Sans approfondir ici la question de "toutes les lignes" de Cavalieri[10], il faut conclure que Cavalieri employa le verbe *adaequari* dans le but d'introduire un procédé que nous appellerions d'approximation, qui était nouveau et risquait des critiques (par exemple celles de Guldin) par rapport aux paradoxes de l'infini. La plupart des historiens ont vu l'usage du terme de la part de Fermat dans le même cadre: un procédé d'approximation, la nécessité du recours à un terme ambigu pour un procédé nouveau. Or, nous croyons qu'en effet cela fait partie d'une interprétation correcte de l'usage de ce terme. Cependant, nous voyons aussi la nécessité de prendre au sérieux la signification du mot pour les mathématiciens de l'époque. Nous avons trouvé une confirmation de cette

[8]"Quarumlibet planarum figurarum omnes lineae recti transitu, et quarumlibet solidarum omnia plana, sunt magnitudines inter se rationem habentes."

[9]Voir [13] p.203, Sectio XXIII.

[10]Deux ouvrages sur Cavalieri ont été publiés récemment: Giusti [105], ainsi que Andersen [85].

attitude en découvrant une autre attestation du mot au XVIe siècle: Guillaume Gosselin, dans son écrit ***De ratione discendae docendaeque mathematices*** (Paris 1583). Gosselin définit ce terme de la façon suivante:

> On parle d'*adaequatio* quand, dans la recherche des valeurs des inconnues pour l'explication du problème, nous appliquons nos hypothèses à une valeur de l'inconnue proche d'un nombre déterminé, comme si on l'appliquait à la vraie valeur.(p.17v)[11]

Gosselin connaissait Diophante et la traduction de Xylander, ce qui indique que cette définition unifie la notion de *parisotes* avec celle de la règle du faux. Il paraît donc important de voir l'emploi du terme par Fermat comme avant tout quelque chose de connu et de reconnaissable dans son origine. Que la référence fut évidente résulte aussi des remarques de Descartes dans sa première lettre à Mersenne contre la *méthode* de Fermat:

> ...(sa règle) est telle que, sans industrie et par hazard, on peut aisément tomber dans le chemin qu'il faut tenir pour la rencontrer, lequel n'est autre chose qu'une fausse position fondée sur la façon de démontrer qui réduit à l'impossibile et qui est la moins estimée et la moins ingénieuse de toutes celles dont on se sert en mathématiques. Au lieu que la mienne (...) suit la plus noble façon de démontrer qui puisse être, à savoir celle qu'on nomme *a priori*.(18 janvier 1638, O.F.II, p.129).

Descartes semble évoquer ici ses réserves habituelles sur l'algèbre de son temps (comme dans les ***Regulae***[12] ou dans le ***Discours de la méthode***)[13], et surtout son manque de confiance pour la méthode

[11]"Adaequatio dicitur, quando in inveniendis ad problematis explicationem nominibus, certi cuiusdam numeri lateri proximo, tamquam vero, applicamus hypotheses".

[12]Je pense à la Regula IV.

[13]Voir Oeuvres de Descartes [22] t. VI, pp.17-18, le célèbre passage: "I'avois vn peu estudié, estant plus ieune, entre les parties de la philosophie, a la Logique, & entre les Mathematiques, a l'Analyse des Geometres & a l'Algebre, trois ars ou sciences qui sembloient deuoir contribüer quelque chose a mon dessein. Mais, en les examinant, ie pris

d'exhaustion, avec la réduction à l'absurde. Or, il se trouve que l'adéquation de Fermat ne comportait aucune réduction à l'absurde. Il est vrai que, comme on le verra plus loin, une explicitation de la procédure de Fermat, ou une synthèse, telle que sera développée par Huygens, aurait imposé de reparcourir toute la méthode d'exhaustion. Cela appartenait tant à la tradition archimédienne qu'aux *adéquations* à la Diophante. Mais Fermat, comme le savait bien Descartes, reprenait la tradition algébrique plus récente qui ne se souciait pas de compléter la synthèse, pas plus que Descartes lui-même. D'ailleurs, il ne s'agit là que d'une des preuves que Descartes n'étudia pas attentivement la *méthode* de Fermat ou qu'il lui reprocha des défauts généralement tolérés.

Mahoney[14] a souligné l'importance de la règle du faux dans une direction différente de la nôtre: Fermat en aurait fait usage dans la version de l'***Analytica*** que l'on verra ci-dessous, en tant que technique de l'hypothèse contrefactuelle. Par contre, le terme *adaequatio* ou *adaequalitas* n'aurait été employé par Fermat que pour couvrir son raisonnement non-conventionnel (quoique finitiste) par un terme qui jouissait de l'autorité des classiques. Tout en reconnaissant dans ce jugement historique mon point de départ, je pense devoir le modifier. L'*adaequatio* pouvait ne pas être trop appréciée par des auteurs systématiques comme Descartes, mais était une technique bien connue et reconnaissable pour les lecteurs des textes d'algèbre du XVIe siècle. L'employer ne constituait donc pas, pour Fermat, une façon de cacher sous un terme peu connu une technique nouvelle, mais plutôt une manière d'appliquer des techniques algébriques à des questions nouvelles. Autrement dit, je pense que nous avons un autre élément pour

garde que, pour la Logique, (...). Puis, pour l'Analyse des anciens & l'Algèbre des modernes, outre qu'elles ne s'éstendent qu'a des matieres fort abstractes, & qui ne semblent d'aucun vsage, la premiere est tousiours si astrainte a la consideration des figures, qu'elle ne peut exercer l'entendement sans fatiguer beaucoup l'imagination; et on s'est tellement assuieti, en la derniere, a certaines regles & a certains chiffres, qu'on en a fait vn art confus & obscur, qui embarrasse l'esprit, au lieu d'vne science qui le cultiue. Ce qui fut cause que ie pensay qu'il falloit chercher quelque autre Methode, qui, comprenant les auantages de ces trois, fut exempte de leurs defaux."

[14]Voir M.S.Mahoney [82] chapitre IV.

croire qu'il se considérait tout à fait à l'intérieur de la tradition algébrique française, et que sa découverte d'une *méthode* n'était qu'une extension particulièrement significative et féconde du programme analytique de Viète.

2. La version de l'*Analytica*

Dans l'***Analytica*** (c'est-à-dire dans la pièce qui commence par "Dum syncriseos et anastrophes Vietaeae methodum expenderem")[15], datée, selon Mahoney, de 1640, Fermat écrit:

> Quand je prenais en considération la *syncrisis* et l'*anastrophe* de Viète, et que j'explorais plus soigneusement leur utilité pour comprendre la constitution des équations corrélatives, il me vint à l'esprit une nouvelle méthode, qui en dérive, pour trouver le maximum et le minimum. Par moyen de cette méthode tous les doutes concernant les cas de *diorismòs*, qui ont causé tant d'embarras aux géomètres anciens et modernes, seront très facilement dissipés." En effet, les maxima sont uniques et singuliers, comme l'affirme Pappus, et comme les anciens le savaient, quoique Commandinus avoue de ne pas comprendre ce que Pappus entendait pas *monachos*. De cela il suit que, des deux côtés du point qui constitue la détermination, l'on peut prendre une équation ambiguë, et que ayant pris ces deux équations de cette manière, il en résulte deux équations ambiguës corrélatives, égales et semblables.
>
> Par exemple, soit proposé le problème *couper la droite B de façon telle que le rectangle sous ses deux segments soit maximum.* Le point satisfaisant le problème divise, évidemment, la droite donnée en deux parties égales, le rectangle maximum est égal à un quart de B carré, et il n'y a pas d'autres divisions de cette droite qui donne un rectangle égal à un quart de B carré.

[15]Il s'agit de la pièce IV de la section sur les maxima et minima du O.F.I, c'est à dire la pièce aux pages 147-153. J'adopte ce titre par conformité avec le commentaire de Mahoney, qui approfondit l'examen de cette pièce. On peut trouver entre autre, dans son chapitre IV, une justification de l'usage de ce titre.

Par contre si l'on propose de *couper la même (droite) avec la condition que le rectangle sous ses segments soit égal au plan Z* (que l'on doit supposer plus petit qu'un quart de B carré), alors deux points satisfont le problème, et il sont pris à partir du point du rectangle maximum.

Soit, en effet, A un segment quelconque de la droite B, il sera

B in A - A quad. aequale Z plano

or, cette équation est ambiguë, et indique que l'on peut prendre l'une ou l'autre des deux racines pour la droite A.

Soit donc l'équation corrélative

B in E - E quad. aequale Z plano;

comparons ces deux équations par la méthode de Viète:

B in A - B in E aequale A quad. - E quad.

et, ayant divisé tous les termes par A - E, il résulte

B aequalis A + E,

où A et E seront inégales.

Si l'on prend un autre plan à la place de Z plan, qui soit plus grand que Z plan, mais plus petit qu'un quart de B carré, alors les droites A et E diffèrent entre elles moins que les précédentes, parce que les points de division sont plus proches du point qui constitue le maximum et toujours, quand les rectangles obtenus par les divisions augmentent, la différence entre A et E diminue, jusqu'à ce que par la dernière division, qui donne le rectangle maximum, la différence disparaisse, et dans ce cas il y a une solution *monachè* ou unique, n'y étant que deux quantités égales, c'est-à-dire A aequabitur E .

Donc, puisque dans les deux équations corrélatives précédentes

l'on pose, selon la méthode de Viète, B aequalis A+E, si E est égal à A lui-même (ce qui semble arriver toujours dans le point qui constitue le maximum ou le minimum) alors, dans le cas proposé,

B aequabitur A bis;

c'est-à-dire, si la droite B est divisée en deux parties égales, le rectangle sous ses segments sera maximum. (O.F.I, pp.147-149)

La procédure de maxima et minima expliquée dans l'*Analytica* peut se résumer comme suit:

1) Supposer le problème résolu et l'exprimer par une équation telle que le premier membre qui contient les relations entre les données et l'inconnue soit égal à la quantité dont il faut trouver l'extrêmum;

2) l'équation est au moins du deuxième degré, donc on peut, suivant la *syncrisis* de Viète, écrire deux équations dites corrélatives en substituant l'inconnue par deux racines, qu'on appellera **a** et **e**, respectivement;

3) suivant la *syncrisis*, on compare ou égale les membres contenant les racines;

4) suivant la *syncrisis*, on divise par la différence des racines;

5) Les points précédents valent en général. Dans les cas d'extrêmum, on doit poser la condition qui le caractérise c'est-à-dire la racine double **a** = **e**.

Remarques

Il s'agit ici de la version qui, quoique rédigée après la ***Methodus***, a été reconnue comme décrivant la première conception de la *méthode*: en particulier, d'abord Tannery, ensuite Itard et Mahoney ont souligné le rôle de cette présentation pour toute reconstruction de la genèse de la *méthode* de Fermat. Fermat d'ailleurs explique lui-même que tel est l'ordre de formation de la *méthode* dans la suite de la pièce, quand il écrit:

> Cependant, puisque cette pratique des divisions est laborieuse et très compliquée, il m'a paru opportun de comparer les racines des équations corrélatives entre elles par moyen de la différence des racines mêmes, de façon que tout le travail consiste en une seule division par cette différence. Soit à trouver le plus grand solide égal à B q. in A - A c. D'après le précepte de la méthode donné plus haut, on doit prendre l'équation Bq in A - Ac. Mais puisque E (ainsi que A) est une quantité inconnue, rien n'empêche de la dénoter par A + E: on aura ainsi
>
> B q in A + B q in E - A c - E c - A q in E ter - E q in A ter
>
> (etc. O.F.I, pp.149-151).

Fermat donne ici les deux "fondements" de sa *méthode*, c'est-à-dire la *syncrisis* de Viète et l'observation de Pappus découlant de l'étude classique des problèmes des *diorismòi*. Pappus en effet, dans le livre VII des ***Collectiones***[48], traite de plusieurs problèmes (d'Apollonius) qui comprennent des cas limites ou "déterminations" (*diorismòi*, notion que nous allons préciser dans le prochain chapitre). Dans ce cadre, et précisément à propos du Lemme 21, Proposition 61, Pappus emploie le terme repris par Fermat, en affirmant que dans ces cas limites deux solutions deviennent une solution unique (*monaché*). Commandino se déclarait perplexe par rapport à cette remarque de Pappus (voir [47]), mais Fermat pouvait l'interpréter en termes de théorie des équations. L'observation de Fermat à ce propos a été mise en valeur par Hofmann et Mahoney, qui y voient la clé pour reconnaître le procédé algébrique à l'origine de la *méthode*. La thèse

principale de Mahoney à propos des fondements de la *méthode* est en effet la suivante: le théorème ou principe de départ est que dans le point de l'extrêmum les racines sont égales, auquel Fermat ajoute la supposition contrefactuelle que les deux racines soient inégales. Cette supposition contrefactuelle fut ensuite exprimée, dans la ***Methodus***, par l'*adéquation*[16]. Nous ne pouvons que confirmer cette évaluation et renvoyer aux ouvrages cités. Ce que notre approche met en évidence est la continuité entre la règle du faux qui justifie cette hypothèse contrefactuelle et l'usage du terme *adéquation* qui, pour Mahoney, doit être entièrement séparé de la conception originelle de la méthode.

Il nous faut ajouter quelques remarques à propos de la notion de *syncrisis*. Il s'agit de la procédure de Viète qui permet d'exprimer les coefficients en termes des racines[17]. Chaque équation (au moins) quadratique donne lieu à deux équations corrélatives, déterminée par les deux racines de l'équation originelle. La procédure demande d'isoler les termes connus, d'établir une équation entre (comparer) les premiers membres et de diviser par la différence des racines. Tout cela a été expliqué par plusieurs auteurs, et spécifiquement par Mahoney. Nous voulons pourtant souligner que le terme *syncrisis* n'a pas été inventé par Viète[18], mais au contraire appartenait au grec classique et était normalement traduit par *comparatio*. Il faut donc penser que, même du point de vue terminologique, la structure du raisonnement de Fermat procédait de la *comparatio per aequationem* à la *comparatio per adaequationem*.

---

[16]Voir aussi, pour une présentation rapide de l'interprétation de Mahoney, l'article ***Fermat*** dans [103].

[17]Voir [61], ***De recognitione aequationum***, caput XVI, p.104.

[18]Comme pourtant l'affirme Mahoney [82], pp.148-149.

3. La version de l'*Appendix*

Fermat étudia assez tôt, et précisément en 1644, l'application de la règle pour les extrêma aux cas que nous appellerions des fonctions contenant des racines. Cette "extension" qui, contrairement aux versions précédentes, n'a pas fait l'objet de débats historiographiques, et a été traitée seulement récemment[19], a pourtant une grande importance, d'abord parce qu'elle montre que Fermat s'occupait de la généralité de la *méthode*, et ensuite parce que cette version lui permit de résoudre divers problèmes géométriques, et lui servira notamment pour la détermination, par moyen de la *méthode*, de la loi de réfraction.

Fermat écrit:

> Puisque dans le développement des questions il se présente souvent des radicaux, l'Analyste ne doit pas hésiter à employer trois inconnues ou, si nécessaire, encore davantage: on pourra en effet, de cette manière, éviter spécialement les élévations aux puissances, qui sont trop complexes. La méthode de cet artifice procède de la manière montrée par les exemples ci-dessous." (O.F.I, p.153)

En termes modernes, Fermat cherche le maximum de la fonction $x+\sqrt{bx-x^2}$. Plus abstraitement, il cherche la valeur extrême pour la fonction

(1) $$f(x)=p(x)+\sqrt{q(x)}$$

où p et q sont des polynômes. De (1) on peut obtenir:

[19]C'est à dire, dans le livre de Mahoney [82], où l'on peut trouver une étude très intéressante sur le sujet, pp.205-208.

(2) $$f(x)-p(x)=\sqrt{q(x)}$$

Ce qui, élévé au carré, devient

(3) $$(f(x))^2 + (p(x))^2 - 2\, f(x)p(x) = q(x)^2$$

ou

(4) $$g(x) = (f(x))^2 = q(x)^2 - p(x)^2 + 2\, f(x)p(x)$$

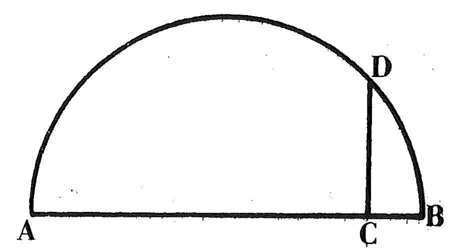
L'argument de Fermat est que si f(x) a une valeur extrême en x_1, $(f(x))^2$ aura aussi une valeur extrême en x_1 (et vice versa). Or, dans notre cadre de référence, nous disons que cela est vrai parce que Fermat concevait ses grandeurs comme positives, c'est-à-dire que, implicitement, nous avons pris f telle que $f(x)>0$.

Fermat cherche donc un x_1 qui maximise le côté droit de (3), et faisant cela il traite f(x) comme une constante, U. Voilà l'exemple:

> *Soit un demi-cercle de diamètre AB, avec la perpendiculaire DC au diamètre*. On demande le maximum de la somme AC+CD. Appelons B le diamètre, posons que AC soit A; on aura donc que CD est lat. B in A - A quad. La question est ramenée à rendre maxima la quantité A + lat.B in A - A quad.
>
> En appliquant les préceptes de la méthode, on arriverait à poser l'adéquation entre des expressions de degré trop élevé; désignons donc par O la quantité maxima: car pourquoi devrions nous refuser la représentation[20] de Viète des quantités inconnues par des voyelles? On aura ainsi:
>
> A + lat.(B in A - A quad.) aequabitur O, d'où O - A aequabitur lateri(B in A - A quad.)
>
> et en élevant au carré:

[20]Fermat a "expressionem".

O quad + A quad - O in A bis aequabitur B in A - A quad.



Après ces opérations, il faut établir la transposition afin que le terme qui contient O à la puissance la plus élevée soit un membre de l'équation; on pourra ainsi déterminer le maximum qui est le but de l'artifice. Par cette transltion on obtient:

B in A - A quad. bis + O in A bis aequabitur O quad.

Puisque par hypothèse O est une quantité maxima, O quadratum sera le carré d'une quantité maxima, donc maximum. Par conséquent,

B in A - A quad. bis + O in A bis

(qui sont égales à O quad) sont une quantité maxima.
Cette équation nel contient pas de radicaux, donc nous pouvons la résoudre par la méthode comme si la quantité O était connue. Par conséquent

B in A - A quad. bis + O in A bis *adaequabitur*
B in A + B in E - A quad bis - E quad bis
- A in E quater + O in A bis + O in E bis.

Après avoir supprimé les termes communs, et divisé les restants par E, on obtiendra

B + O bis *adaequabitur* E bis + A quater.

On élide E bis selon la méthode, donc

B + O bis aequabitur A quater

par conséquent

A quater - B aequabitur O bis,

et

A bis - dimid. B aequabitur O.

Après avoir établi cette égalité par la méthode, il faut retourner à la précédente, dans laquelle on posait

A + lat.(B in A - A quad.) aequari O.

Puisque nous venons de trouver

O aequalis A bis - dimid B,

nous aurons

A bis - dimid. B aequabitur A + lat.(B in A - Aquad.).

Elevons au carré:

A quad. + B quad. 1/4 - B in A aequabitur B in A - A quad.

et enfin

B in A - A quad. aequabitur B quad. 1/8.

Cette dernière équation donnera la valeur A de la détermination cherchée. (O.F.I, pp.153-154)

On peut résumer cet *artifice* de la façon suivante:

1) Supposons que la quantité dont il faut trouver le maximum soit de la forme

$$f(a) = p(a) + \sqrt{q(a)}.$$

2) Supposons que le problème soit résolu pour a : f(a) est alors une quantité inconnue, que nous indiquons par U , et traiterons comme une constante[21].

Nous écrivons donc

$$(*) \quad p(a) + \sqrt{q(a)} = U$$

ou

$$U - p(a) = \sqrt{q(a)}$$

3) Elevons les deux membres au carré,

$$g(a) = q(a) - p(a)^2 + 2Up(a) = U^2$$

Mais puisque, par hypothèse, U est un maximum, son carré aussi sera un maximum, ainsi que le premier membre de l'équation, auquel on pourra donc appliquer la *méthode* (version de la ***Methodus***: adéquation entre g(a) et g(a+e) etc.), et si un terme contient U, la traiter comme une constante.

[21] Pour une fois, j'ai modifié la notation de Fermat et celle de Tannery, en ce Fermat emploie le symbole O pour la troisième inconnue, que je préfère remplacer par U pour éviter des confusions avec zéro ou, pire, avec des petits accroissements.

4) Ayant ainsi la valeur de U par la *méthode*, la remplacer dans (*) , ce qui conduit à une équation en a et qui ne contient pas de radicaux.

Comme je le rappelais ci-dessus, cet artifice, outre à donner la mesure du domaine d'application de la *méthode*, fut employé par Fermat dans son calcul pour la loi de réfraction où, cependant, la fonction de départ contient deux radicaux au lieu d'un seul.

4. La lettre à Brûlart

<u>*Le contexte*</u>

Fermat annonça souvent une présentation complète de sa *méthode* des maxima et minima, et ses lecteurs l'attendaient depuis longtemps. Surtout après avoir donné la *méthode* sous forme de procédure dans la ***Methodus*** et l'"analyse" qui conduit à la solution du problème dans l'***Analytica***, il lui fallait, pour compléter la démonstration, fournir la "synthèse". La seule ébauche de synthèse fut celle qu'il envoya à Mersenne, jointe à sa lettre du 7 avril 1643, c'est-à-dire la lettre à Brûlart.

Il est clair que la lettre à Brûlart[22] - comme l'écrit l'éditeur De

[22] Pierre Brûlart de St.Martin, écrit De Waard, était, comme Carcavi, conseiller au Grand Conseil à Paris et, comme son ami Frenicle, s'intéressait beaucoup aux problèmes numériques. Il était en relation avec Fermat à plusieurs titres: d'une part, il fréquentait la cellule de Mersenne, d'autre part, il était, après Frenicle, le principal interlocuteur de Fermat en ce qui concerne les problèmes numériques. Il semble avoir eu le pouvoir d'obliger moralement Fermat à rédiger des présentations de ses découvertes. Fermat écrit en effet dans cette lettre à Mersenne: "Vous aurez maintenant la réponse que je fois à M.de Brulart, jointe à celle-ci; je l'ai écrite à la hâte, comme vous verrez, et c'est la raison qui m'oblige à vous prier qu'elle ne sorte pas d'entre les mains de M. de Brulart." (O.F.II, p.252). Mais aussi, dans la lettre à Mersenne datée probablement d'août 1643, il écrit: "Vous m'obligerez de saluer M. de St.Martin de ma part. Peust-estre que, pour l'amour de luy, je mettray par escrit mes inventions sur Diophante, où j'ai découvert plus que je ne

Waard - "tend à une démonstration". En effet, le texte suggère que Fermat écrivit cette lettre se référant à ce qu'il appelle "ma *méthode*", comme s'il ne s'agissait, ici, que d'expliciter les arguments que sous-tendent ses techniques. Mais cet écrit, tout en justifiant la procédure de la ***Methodus*** à laquelle il se refère, donne les éléments d'une nouvelle procédure, qui a l'avantage de ne pas contenir implicitement la division par zéro. Cette nouveauté par rapport aux présentations précédentes à été soulignée par les historiens dès que l'écrit fut découvert et publié[23]. En particulier, Wieleitner, Stromholm et Mahoney[24] considèrent cet écrit comme le moment le plus mûr de l'élaboration de la *méthode* de Fermat, d'autant plus qu'il contient explicitement le critère de distinction entre un maximum et un minimum. Même si cet exposé contient des affirmations erronées, (comme je le montrerai plus loin), il a le mérite de contenir l'explication des conditions de l'extrêmum qui étaient absentes dans les présentations précédentes, et des remarques sur la *méthode* qui montrent que l'auteur en a poursuivi l'élaboration même après son invention de 1628. En particulier on verra comment Fermat a tenu compte de certains point de la critique de Descartes par rapport à la *méthode*. Qu'il suffise, pour le moment, de noter qu'il emploie la notation cartésienne pour les puissances, tout en gardant les lettres majuscules (les voyelles **A,B** pour les inconnues, **B** pour le coefficient) et la condition d'homogénéité sur les termes.

m'étais jamais promis." ([44] XIII, p.273)

[23]Le texte de cette lettre fut publié d'abord par le père Giovannozzi, dans "Archivio di storia della scienza" vol. I, 1919, pp.137-140, et ensuite, en 1922, par De Waard, dans O.F. Suppl., pp.120-125. D'après l'éditeur De Waard, l'exposé lui-même daterait plutôt du 31 mars 1643. Le texte de la lettre à Brûlart a été réimprimé en 1972, avec celui de la lettre à Mersenne, dans [44] XII, pp.140-148.

[24]Il s'agit des trois textes fondamentaux sur la *méthode* de Fermat: H. Wieleitner [70]; P. Stromholm [79], M. Mahoney [82] quatrième chapitre.

L'argument de Fermat.

Fermat écrit: "Mon invention de Maxima et Minima n'a que deux ou trois fondements" (O.F.Suppl. p. 121). On doit regarder ces derniers comme conditions ou hypothèses sur les extrêma, et l'on peut les résumer comme suit:

1) la recherche d'un extrêmum aboutit à un terme unique

2) si l'on part d'un polynôme f(a), et l'on veut déterminer l'argument **a** pour la valeur extrême, "f(a+e) et f(a-e) doivent donner la même équation"

3) si f(a+e) < f(a), alors on doit avoir f(a-e) < f(a), et de manière analogue pour le minimum.

Je commenterai ici ces "fondements", tout en donnant l'essentiel de l'argument de Fermat.

à propos de 1) Fermat lui-même précise ce point. Il prend en considération le problème classique

> par exemple quand on veut diviser une ligne en sorte que le rectangle sous les segmens soit esgal à un espace donné. (O.F. Suppl. p.121)

et, après avoir repété les remarques à propos de la notion d'extrêmum chez Pappus que l'on trouve dans plusieurs essais antérieurs sur la *méthode*, il écrit:

> Il faut donc chercher un point unique, au delà et au deçà duquel tous les termes de la question soient ou tousiours plus grands ou tousiours plus petits que celui qui sera produit par le point cherché. Il importe donc de comparer le point unique avec ceux qui peuvent estre imaginés de chaque costé.(ibidem, p.122)

Le segment qui donne le point unique est **a**, tandis que **a+e** et **a−e** permettent de comparer f(a) avec f(a+e) et f(a−e) situés des deux côtés.

Ici Fermat semble penser à la situation géométrique qui avait motivé son premier algorithme (dans ***Analytica***, qui d'ailleurs contient le même exemple). Il continue, dans ce même sens:

> **Il faut trouver une méthode par moien de laquelle A+E et A−E donnent le même terme pour représenter A, afin que le dict A représente le point du mitan.**

Ici donc **A** est pris comme le point du maximum, et peu importe de quel côté on choisit de prendre l'accroissement. Par contre, le contexte et le contenu géométrique ne sont guère pris en compte dans la suite de l'exposé, dont l'argument consiste surtout à comparer f(a+e) et f(a−e) dans leur développement respectif plutôt que d'établir la relation entre f(a+e) et f(a), d'une part, et entre f(a−e) et f(a), d'autre part. Ainsi, du point de vue du calcul, le fondement 1) est absorbé par 2).

à propos de 2) Il faut lire ce fondement comme une condition qui découle de 1): si l'extrêmum est unique, on doit arriver toujours à la même valeur pour **a**. Fermat lui-même, dans la lettre à Mersenne qui accompagnait celle-ci, explique ce point en écrivant:

> lorsque j'ai dit que A−E doit donner la même équation que A+E , j'entends que par la position de A−E , en suivant ma méthode, on doit trouver A égale à une même quantité que si nous employons A+E par la même méthode. (O.F.II, p.254)

Cette condition, que **a+e** et **a−e** donnent la même équation, est satisfaite si l'on applique le procédé suivant:

- prendre en considération les termes en **a**, ou e^2, ou e^3 etc.

- établir une égalité entre les termes de la même puissance de **e**,

Dans l'exemple donné par Fermat, c'est-à-dire le problème classique de déterminer le maximum de ba^2-a^3, ici f(a), on aura:

i) $f(a+e) = ba^2 - a^3 + be^2 - 3ae^2 + 2bae - 3a_2e - e^3$

ii) $f(a-e) = ba^2 - a^3 + be^2 - 3ae^2 - 2bae + 3a^2e + e^3$

Si donc on veut appliquer le procédé à **e** , on obtiendra, tant de i) que de ii),

$$2bae = 3a^2e$$

et si l'on applique le procédé à e^2,

$$be^2 = 3ae^2.$$

Donc, en termes modernes, si l'on voit i) comme

$$f(a+e)-f(a)+f'(a)e+\frac{1}{2!}f''(a)e^2-\frac{1}{3!}f'''(a)e^3$$

et ii) comme

$$f(a-e)-f(a)-f'(a)e+\frac{1}{2!}f''(a)e^2-\frac{1}{3!}f'''(a)e^3$$

le procédé consiste à poser

$$* \; f'(a)e-0$$
$$** \; f''(a)e^2-0$$
$$*** \; f'''(a)e^3-0$$

L'exemple montre que, jusqu'à un certain point, Fermat gardait à l'esprit les versions précédentes de la *méthode* puisque la même équation à laquelle on parvient en i) ou ii) était en effet celle qu'on obtenait par l'application de l'algorithme de la ***Methodus***. Mais l'argument de Fermat se développe ici dans une autre direction: s'il est vrai que toutes les applications possibles du procédé permettent de satisfaire la condition 2) sur l'extrêmum, il n'y a que * qui nous amènera vraiment à la détermination de l'extrêmum. Cela étant clair, dans les cas classiques, d'après les résultats des anciens, il faut le démontrer en général, c'est-à-dire pour tout le domaine d'application de la *méthode*. Dans le but d'expliquer la nécessité d'appliquer * pour obtenir un maximum, Fermat introduit 3).

à propos de 3) Ce principe est exactement la condition pour un maximum ou un minimum, dans le cas où cela peut conduire à une condition nécessaire pour une valeur extrême si l'on argumente sur la petitesse de **e** . Mais Fermat visait à donner une méthode algébrique de solution et non pas une présentation rigoureuse, et ne procèda pas ainsi. Plutôt, il fit usage d'arguments qui sont partiellement faux mais les appliquant de façon telle qu'il obtient l'équation correcte pour déterminer **a**. Si nous nous bornons, dans une lecture moderne, à considérer des fonctions f(a) qui sont des polynômes en **a**, nous pouvons présenter l'approche de Fermat de la façon suivante.

Interprétons l'argument de Fermat en faisant référence à des f(a) ayant la forme

$$p_1(a) - p_2(a) \quad \text{avec } a > 0$$

où p_1 et p_2 sont des polynômes à coefficients positifs, par exemple de la forme

$$b_2a^2 + b_1a + b_0 - c_2a^2 - c_1a - c_0 \quad \text{avec } b_i \text{ et } c_j > 0$$

Ainsi,

$$f(a+e)=p_1(a)-p_2(a)+(p_1'(a)-p_2'(a))e+\frac{1}{2}(p_1''(a)-p_2''(a))e^2+\frac{1}{3}(p_1'''(a)-p_2'''(a))e^3$$

et de même pour

$$f(a-e).$$

Fermat affirme alors que nous devons égaler les termes en **e** pour satisfaire la condition 3), parce que les termes sont entre eux dans la relation suivante:

$$(\#) \qquad \frac{p_1'(a)}{p_2'(a)} > \frac{p_1''(a)}{p_2''(a)} > \frac{p_1'''(a)}{p_2'''(a)}$$

Ouvrons ici une parenthèse: Fermat écrit:

> (...) les termes mesurez par la plus basse puissance de e , ont tousiours plus grande raison entre eux que ceux qui sont mesurez par E^2 ou par E^3 etc.(ibidem p. 124)

Il écrit ici "etc." et l'on voudrait qu'il soit plus explicite sur la possibilité de poser cette inégalité pour les termes contenant les plus hautes puissances de **e** . Mais plus loin, comme on le verra bientôt, il traite ces termes, et la généralisation à e^n, séparément, ce qui permet de croire que, probablement, il pensait que les inégalités (#) pouvaient être considérées valables jusqu'au coefficient de e^{n-1}.

Mais revenons aux rapports entre les inégalités (#) et le fondement 3): quand **a** est un point dans lequel f(a) a un maximum, la première inégalité est valable, tandis que la deuxième est en général incorrecte. Voilà le premier problème que le lecteur moderne rencontre. Sans se soucier de cette question, Fermat conclue que (#) montre qu'il faut employer le procédé *, parce que au moyen de ceci nous obtenons que

$$p_1'(a)-p_2'(a)=0$$

et cela, avec (#), montre que

$$1-\frac{p_1^{/}(a)}{p_2^{/}(a)}>\frac{p_1^{//}(a)}{p_2^{//}(a)}$$

ou que

$$p_1^{//}(a)<p_2^{//}(a)$$

Cela implique que le coefficient de $\mathbf{e}^2$ dans les deux expressions de f(a+e) et f(a−e) est négatif. Si elles ne contenaient pas des termes à des puissances de **e** supérieures à $\mathbf{e}^2$, cette conclusion montrerait qu'on peut ainsi obtenir les inégalités voulues:

$$f(a+e) < f(a) \quad \text{et} \quad f(a-e) < f(a)$$

Comme on l'a déjà noté, la difficulté surgit quand Fermat doit tenir compte des termes en $\mathbf{e}^3$, $\mathbf{e}^4$ etc. En effet, il emploie alors l'argument suivant:

> Et la dernière puissance de E, qui se trouve tousiours seule et qui est ici E^3 ne changera point l'ordre de l'équation de quelque signe qu'elle soit marquée, ce qui nous paraîtra à la seule inspection.(ibidem, p. 125)

Or, ce que Fermat désignait comme "l'ordre de l'équation" n'est pas clair. Ce qu'il semble suggérer est que, même quand l'expression pour f(a+e) ou f(a−e) contient des termes en $\mathbf{e}^3$ et en $\mathbf{e}^4$, les inégalités (#) fournissent l'argument nécessaire pour employer le procédé * . Si cette conjecture sur la pensée de Fermat est juste, on peut conclure que son argument n'est pas valide.

En effet, si la deuxième inégalité était vraie, on aurait

$$p_1^{///}(a)-p_2^{///}(a)<0$$

d'après quoi on peut voir seulement que les signes des coefficients de $\mathbf{e}^3$ changeraient, tout en restant opposés entre eux. Donc, même en acceptant la condition (#), on ne pourrait pas affirmer que si f(a+e) < f(a) alors f(a−e) < f(a) .

Il semble donc que, en employant cet argument, Fermat ne se soucia pas trop d'analyser la situation dans laquelle le coefficient de $\mathbf{e}^3$ n'était pas une constante[25]. Quand, comme dans l'exemple, ce coefficient est une constante, il néglige le terme contenant $\mathbf{e}^3$ sans employer d'argument sur la petitesse de **e**. Par contre, même s'il élude la question des termes d'ordre supérieur à deux, Fermat parvint à introduire une méthode très utile qui ne permettait pas seulement de déterminer le point où l'expression f(a) a sa valeur extrême, mais aussi de décider s'il s'agissait d'un maximum ou d'un minimum.

> Car si le terme marqué + est moindre que le terme marqué −, en ce cas la proposition aboutira à la recherche de la plus grande: que si le terme marqué + est plus grand que le terme marqué − , en ce cas las question sera de la plus petite. Que si nous employons A−E, les deux termes mesurez par E^2 auront chacun le même signe" [que si l'on emploie a+e]. (ibidem)

Pour cette conclusion, Fermat ne donne pas d'argument. Il se borne à énoncer le principe d'après lequel c'est le signe du coefficient de $\mathbf{e}^2$ qui décide de l'extrémum. Puisque c'est vrai, on n'a pas souvent soulevé la question à savoir d'où il tire cette conclusion. Une conjecture possible est que Fermat raisonne ici uniquement sur f(a+e)[26]. Plus globalement, il me semble qu'on puisse défendre l'argumentation de Fermat de deux façons:

---

[25] Il faut remarquer d'autre part que Fermat ne considéra jamais de tels polynômes comme exemples d'application de ses méthodes.

[26] Cela semble être aussi l'avis de Stromholm [79].

a) en supposant qu'on peut prendre les inégalités (#) dans un sens restreint, étant donné que, dans les exemples qu'il traitait, Fermat ne rencontrait pas de cas où les puissances de **e** supérieures à e^2 auraient pu créer des problèmes par rapport à l'argument principal, c'est à dire la comparaison avec f(a+e) et f(a−e) et aussi la validité même des inégalités (#).
b) en conjecturant que Fermat a d'abord négligé les termes en e^3 etc. pour des raisons semblables à celles de a). Dans le texte, les inégalités s'arrêtent en effet à la première, qui est valable.

On pourrait évidemment éviter ce genre de justification en considérant e comme petit, ou au moins tel que e<1. Mais les interprétations des textes de Fermat en termes d'infiniment petits ont été réfutées et rien ici ne suggère de réviser cette position.

Il faut remarquer aussi que, dans ce sens, les limites que posent les conjectures a) et b) enlèvent quelque intérêt à l'exposé de Fermat, tout en le rendant plus rigoureux. En effet la comparaison entre f(a+e) et f(a−e) semble être intéressante seulement quand les signes diffèrent, soit pour les puissances impaires. Si, par le principe ou fondement 3) (et les inégalités (#)) on annule le premier terme, on doit bien avoir une raison de supposer que les autres puissent être négligés: c'est ce que la petitesse de **e** pourrait donner.

Remarques finales

Je veux terminer par quelques remarques plus générales. En septembre 1637, Fermat avait fait parvenir à Paris quelques commentaires critiques sur la ***Dioptrique*** de Descartes. Après avoir répondu durement à ces objections dans sa lettre à Mersenne du 18 janvier 1638 Descartes commença à critiquer, à son tour, la *méthode* de maxima et minima de Fermat. La querelle se poursuivit et dans une autre lettre à Mersenne, celle du 3 Mai 1638, Descartes écrivit:

> Outre cela, il fallait faire deux opérations, et montrer qu'on trouve la même chose en supposant EI[27] être A+E que lorsqu'on le suppose être A−E. Car sans cela le raisonnement de cette opération est imparfait et ne conclut rien.(O.F.II,p. 145)

Or, si l'on suit l'interprétation de Mahoney[28] rappelée plus haut selon laquelle la méthode qui substitue **a+e** à **a** a été introduite par Fermat pour remplacer la substitution de **a** par **e**, expliquée dans l'***Analytica***, il est clair que Fermat voyait **a** comme inconnue du problème et comme une des racines, mais non comme l'abscisse de l'extrêmum. La remarque de Descartes semble donc mal à propos, et Fermat put lui répondre sans difficulté:

> Et n'importe de dire qu'il faut faire deux équations, l'une par A+E, l'autre par A−E, car une seule suffit pour la construction, quoique la démonstration que je n'ai pas encore donnée, tire son principal fondement de ce que A+E fait la même chose que A−E. (O.F.II, p.152, lettre à Mersenne du Juin 1638)

La lecture de cette lettre à la suite de la lettre à Brûlart suggère que Fermat avait déjà à l'esprit l'idée du fondement 2), mais qu'il pensait encore à un algorithme avec f(a) et f(a+e), ou avec f(a) et f(a−e) et non pas (comme dans la lettre à Brûlart) à une comparaison entre f(a+e) et f(a−e). Ainsi, cette lettre à Mersenne appartient à la phase de transition entre le procédé de la ***Methodus*** et celui de la lettre à Brûlart et nous pouvons conclure que la querelle avec Descartes y a joué un rôle.

---

[27] Il s'agit là de l'accroissement de la soustangente.

[28] Mahoney [82] p.147–165.

Conclusion de la première partie

En conclusion, nous pouvons affirmer quelques points qui nous serons utiles par la suite:

1) la *méthode* de Fermat fut conçue dans le cadre conceptuel indiquée par Fermat lui-même dans l'***Analytica***: la *syncrisis* de Viète et l'unicité de l'extrêmum enoncée par Pappus;

2) déjà dans sa première conception, la *méthode* faisait usage d'un outil pratique de l'algèbre qui dans la version humaniste s'appelait l'*adaequatio*;

3) la *méthode* fut modifiée selon la manière indiquée dans la deuxième partie de l'***Analytica*** dans le sens que la deuxième racine est indiquée par A+E;

4) la *méthode* fut modifiée comme on l'apprend de l'***Appendix***, ce qui permettra de traiter les radicaux et de résoudre ainsi des cas plus compliqués, comme la loi de la réfraction;

5) la *méthode* fut approfondie et clarifiée, ou presque demontrée dans la ***Lettre à Brûlart***.

Deuxième partie: Aperçu de la littérature critique

Chacun des nombreux auteurs qui traitèrent des techniques de Fermat pour le calcul différentiel se proposaient d'interpréter une technique sans explication. En termes modernes, l'on part de la position de maximum ou de minimum supposée connue, et l'on pose la valeur de l'ordonnée

correspondante égale à celle de la même fonction pour un accroissement infiniment petit de la variable indépendante. Cette "technique" fut interprétée de deux manières principales, l'une liée à la procédure de la ***Methodus***, l'autre à celle de l' ***Analytica*** et confirmée ensuite par la découverte de la ***Lettre à Brûlart***. Il s'agit d'une tradition historiographique que l'on essayera de tracer ici. Chaque auteur dut attaquer les questions fondamentales suivantes: 1) identifier la *méthode* des maxima et minima à travers les différents écrits; 2) déterminer le fondement logique de la procédure des maxima et minima; 3) identifier la procédure des tangentes; 4) vérifier la dérivabilité, que Fermat se borna à affirmer à plusieurs reprises, de la procédure des tangentes à partir de la *méthode* (des maxima et minima) 5) analyser la polémique Fermat-Descartes et les modifications de la *méthode* déterminées par cette polémique. En général, la réponse à la question 1) caractérisait l'approche de l'historien et conditionnait les autres aspects, car tous les historiens essayaient de découvrir la genèse de la *méthode* de Fermat. Nous allons esquisser ici un exposé d'ensemble, en ordre chronologique, des interprétations proposées. On pourra retrouver les points précédents chez chacun des auteurs, même si nous n'allons pas les expliciter.

1. Montucla

Montucla, autorité à laquelle beaucoup d'auteurs renvoient, affirma que la *méthode* de Fermat pour maxima et minima était fondée sur une idée de Kepler. Montucla écrit:

> La méthode de maximis et minimis de Fermat est fondée sur ce principe déjà apperçu par Kepler dans sa ***Stereometria doliorum***, savoir que lorsqu'une grandeur, par exemple l'ordonnée d'une courbe, est parvenue

à son maximum ou son minimum, dans une situation infiniment voisine son accroissement ou sa diminution est nulle.[29]

Kepler en effet démontra expérimentalement à propos du volume des tonneaux qu'aux alentours d'un maximum une fonction n'a que des variations insignifiantes. Il fit cela en compilant un tableau de la variation du volume des tonneaux obtenu en variant la hauteur de la diagonale et il remarqua qu'autour de la hauteur du tonneau maximal le volume était presque le même. Cela resolvait le problème dont il était parti, c'est à dire la diversité de forme des tonneaux selon le régions de l'Empire, mais aussi établissait ce qui devint un principe important du calcul infinitésimal[30].

Plusieurs auteurs font remonter ce principe à Oresme[31]. Ce qui nous intéresse ici est que Montucla interprète la "technique" de Fermat en termes d'un principe du calcul des variations (tels son ses mots, même à propos de Kepler). Autrement dit, Montucla attribue à Fermat une approche infinitésimale aux problèmes de maximum et de minimum. Celui-là n'est pas le point de vue actuel sur la question, et nous aussi nous considérons anachronique d'attribuer à Fermat un argument de passage à la limite. Mais on peut reconnaître deux raisons qui ont poussé Montucla dans cette direction: d'abord, son intérêt spécifique pour le calcul des variations, auquel il donna un rôle particulier dans son oeuvre, et ensuite le fait que Montucla a fondé son interprétation sur le seul texte de la ***Methodus***. Montucla avait à sa disposition l'édition [1] des oeuvres de Fermat, et peut-être quelques manuscrits. De fait, il semble avoir eu à l'esprit le texte de la ***Methodus***, ne cite aucune autre source et ne se pose pas la question d'une multiplicité de versions de la *méthode*. Or, justement la version de *Methodus* est celle qui se prête davantage à une interprétation infinitésimale,

[29]Montucla [62] t.II, p.137.

[30]Johannes Kepler [38] p.85

[31]A commencer par A. Aubry, auteur d'une note ***Sur l'histoire du calcul infinitésimal pendant les années 1638-1639***, O.F. IV, p.222, qui donne un commentaire du mémoire de Duhamel.

Montucla réaffirme son interprétation en terme du "principe de Kepler" à plusieurs reprises[32], par exemple quand il ne s'agit pas directement de Fermat, mais de Huygens, ou plutôt de sa version de la *méthode* de Fermat. Huygens en effet, comme nous le verrons plus loin, fournit ce que l'on pourrait appeler une démonstration de la *méthode* de Fermat et qui semble reprendre des aspects de la ***Lettre à Brûlart***. Dans ce texte Fermat pensait aux deux racines de l'équation qui deviennent une racine double dans le cas de l'extrêmum, qui ont donc "d'un côté et de l'autre du maximum ou du minimum" une valeur égale. Mais la ***Lettre à Brûlart*** n'était pas encore connue. Montucla écrivit donc que la démonstration de Huygens est correcte, mais que ce qu'elle démontre est plutôt la méthode de Descartes: c'est cette dernière, en effet, qui ne se fonde pas sur le principe de Kepler, mais sur une idée qui relie les tangentes et les extrêma:

> Son véritable fondement est que lorsqu'une ordonnée est parvenue à son maximum ou son minimum, sa tangente est parallèle à l'axe, et quand cette tangente est parallèle à l'axe, l'ordonnée est le plus souvent parvenue à son maximum ou son minimum; par conséquent alors la différence des deux ordonnées infiniment proches est nulle.([62] p.138)

Nous pouvons en outre interpréter le point de vue de Montucla sur la "technique" de la *méthode* en rappelant qu'il appartenait à la tradition eulerienne, et il pouvait donc penser à la façon de laquelle Euler (ou, d'après Montucla, Lagrange) avait fondé analytiquement le principe de la petite variation[33].

[32]Déjà quand il s'agit directement de la ***Stereometria*** de Kepler, où il écrit: "Nous y trouvons sur tout une remarque heureuse sur les problèmes ***de Maximis et Minimis***: c'est que lorsqu'une grandeur est parvenue au terme de son plus grand accroissement, ou au contraire, dans les environs de ce terme elle ne varie que par des degrés insensibles. Il est facile de voir, dans cette remarque, le fondement de la règle ***de Maximis et Minimis***".

[33]Voir en particulier la brève histoire du calcul des variations de Lagrange et Euler dans Montucla [62] t. III, pp.352-355.

2. Brassinne

Bien que le toulousain Brassinne ne soit pas, d'habitude, cité dans la littérature sur Fermat, on lui doit un "précis" des oeuvres de Fermat qui a été récemment réimprimé [65]. Dès l'introduction, il souligne que:

> Pierre Fermat est considéré par les premiers géomètres de notre époque comme l'inventeur du calcul infinitésimal, et comme le fondateur de la théorie des nombres (p. 1).

Entre-autres, il rappelle deux auteurs qui avaient traité de l'oeuvre de Fermat: Montucla et Genty. Montucla, observe-t-il, a écrit brièvement des mathématiques de Fermat, mais "il ne fait remarquer ni comprendre l'originalité ni la fécondité des nouvelles méthodes qu'il avait créés." En ce qui ce qui concerne l'Abbé Genty, il rappelle son ouvrage "couronné par l'Académie de Toulouse", consacré à l' ***Influence de Fermat sur son siècle***, (1784) qui est "plus intéressant pour les biographes que pour les géomètres", car il est écrit dans la forme d'un éloge académique. D'après Brassinne, Fermat est l'inventeur du calcul différentiel:

> Les deux Mémoires sur la théorie des *maximis* et des *tangentes*, et sur les *quadratures*, nous paraissent constituer la partie la plus importante des ***Opera varia***. Ecrits avant la géométrie de Cavalieri (publiée à Bologne en 1653[34]), et avant la publication de la Méthode des tangentes de Wallis et de Sluze, ils établissent les droits incontestables de Fermat à l'invention du calcul différentiel et du calcul intégral.(p. 4)

Selon Brassinne, Fermat, dans la ***Methodus***, ajoute à l'abscisse une indéterminée **e** infiniment petite. Il faut remarquer qu'ici l'historien ne respecte pas le texte, qui ne contient pas la notion d'infiniment petit. Brassinne observe aussi que:

---

[34] Brassinne parle évidemment de la deuxième édition, car la ***Geometria indivisibilium*** fut publiée pour la première fois à Bologne en 1635.

> Lagrange et Laplace font remonter à la méthode des maximis et des tangentes l'origine du calcul infinitésimal: mais ces deux illustres savants ne citent pas le traité des quadratures, qui complète l'analyse différentielle de Fermat, et qu'on peut considérer comme le premier traité de calcul intégral qui ait été écrit.

Malgré son jugement négatif sur Montucla, on dirait que l'interprétation de Fermat de la part de Brassinne ne s'éloigne pas de celle de son prédécesseur.

3. Duhamel

Duhamel a consacré son essai [66] de 1864 aux méthodes de maxima et minima de Fermat et de Descartes, à leurs rapports réciproques et avec la méthode des tangentes des deux auteurs. Duhamel répète la thèse de Montucla qui fait remonter le fondement de la *méthode* de Fermat au principe de Kepler, mais la développe et lui donne une argumentation plus approfondie. Comme pour son prédécesseur, sa seule référence chez Fermat est la version de la ***Methodus***, avec la procédure des tangentes que Fermat y inclut. Mais avant tout, cela cristallise la *méthode* au seul cas de la version de la ***Methodus***, jusqu'à l'affirmation que Fermat n'aurait pas remarqué la distinction entre le développement de f(a+e) et de f(a−e). Ce point, qui pour Duhamel est un élément de preuve sur la perspective de Fermat, doit être rejeté automatiquement depuis la découverte de la ***Lettre à Brûlart***. Car en celle-ci, comme nous l'avons vu, Fermat fonde sa *méthode* précisément sur la propriété des valeurs de la fonction d'une part et d'autre du point de l'extrêmum. Puisqu'il excluait de l'oeuvre de Fermat toute considération de racine double, tant dans les problèmes de maxima et minima que dans les problèmes de tangentes, il fut facile pour Duhamel de marquer la différence entre la *méthode* ou procédure de Fermat et celle de Descartes. Descartes serait le premier mathématicien qui introduit l'idée des racines doubles.

En parallèle avec Montucla, Duhamel souligna aussi la différence entre la *méthode* de Fermat et la reconstruction de Huygens. Car, et ceci est cohérent avec son interprétation, loin d'expliciter la *méthode* de Fermat, la présentation de Huygens ne serait qu'une version de celle de Descartes. Car le principe de Kepler était sans démonstration, et si Huygens parvient à donner une justification de la *méthode* de Fermat c'est parce qu'il se fonde sur l'idée de Descartes.

Il faut remarquer par ailleurs que, malgré la dépendance par rapport à Montucla, le texte de Duhamel a le mérite de souligner des points importants, notamment que la dérivabilité de la procédure des tangentes par rapport à celle de maxima et minima est due au fait que la tangente est un cas de minimum, comme l'enseignait Apollonius. En outre, Duhamel est le premier à attribuer à Fermat le triangle que Leibniz appellera "caractéristique". Nous reviendrons sur la légitimité de cette attribution.

4. Tannery

Tannery parla de la *méthode* de Fermat dans son compte-rendu d'un essai de Giulio Vivanti[35].

D'après Tannery, Vivanti repète, après beaucoup d'années, la thèse (de Montucla) selon laquelle la *méthode* de Fermat est la traduction arithmétique du principe énoncé par Kepler dans sa ***Stereometria doliorum***, d'après lequel autour du maximum et du minimum, la variation est insensible. Vivanti repète en outre que quand Fermat égalise, en langage moderne, $f(x+e) = f(x)$, Fermat établit seulement une approximation, et même s'il trouve ainsi une relation valable, c'est-à-dire $f'(x) = 0$, il ne démontre pas du tout l'exactitude de ce résultat. Tannery affirme aussi que cette interprétation se justifie sur la base de la ***Methodus***, mais que "nous savons aujourd'hui que

[35]Voir Giulio Vivanti [69], tandis que le compte rendu de Tannery (de 1894) est reproduit dans les [123] t. XI, p.575.

la genèse des idées de Fermat est toute autre", comme l'auteur lui-même l'a indiqué dans l'***Analytica***.

Ce qui caractérise le point de vue de Tannery est justement la redécouverte de l'***Analytica*** en tant qu'explication de la genèse de la *méthode*. Tannery remplace donc le "principe de Kepler" par ce qu'il appelle le "postulat" qui a servi comme point de départ, d'après lequel la racine double correspond à un maximum ou à un minimum. Tannery affirme que Fermat ne l'a pas du tout tiré de Kepler, dont il ne connaissait pas l'oeuvre. Au contraire, selon Tannery ce postulat n'est que la généralisation de l'observation trasmise par Pappus à propos du problème de minimum que Fermat cite à plusieurs reprises. Comme nous l'avons vu, cette observation, qui est peut-être d'Apollonius (dont Pappus reprend l'oeuvre), consiste à dire que dans le cas de l'extrêmum deux valeurs viennent à coïncider et, dans les termes de Fermat, deux racines d'une équation quadratique s'identifient.

L'interprétation de Tannery est partagée, avec des corrections, par les historiens d'aujourd'hui. Tannery trouve d'ailleurs une confirmation de la plausibilité de ce principe pour l'intuition mathématique du XVIIe siècle dans le fait que Roberval, avant d'avoir élaboré sa propre *méthode*, fit usage de ce même postulat dans la détermination du maximum et du minimum.

En conclusion, nous pouvons remarquer que Tannery est le premier à montrer que la publication (de la part de Charles Henry [67]) de la pièce ***Analytica*** implique une nouvelle interprétation de la genèse de la ***méthode*** de Fermat.

5. Zeuthen

Zeuthen écrivit son interprétation de la ***méthode*** de Fermat dans son ***Geschichte der Mathematik um 16. und 17. Jahrhundert*** (1906). Dans cet ouvrage il traita de l'oeuvre de Fermat en rapport avec la géométrie analytique, de la théorie des nombres et des méthodes de quadrature, mais il inclut aussi cet auteur parmi ceux qui introduirent de nouvelles approches et de nouvelles solutions aux "problèmes qui aujourd'hui sont résolus par la différentiation", grâce à sa *méthode* de maxima et minima.

Zeuthen se distingua parmi les historiens parce qu'il présenta ces méthodes en tant que partie d'une tradition, c'est à dire en explicitant les sources et les problèmes où ils prennent leur origine, ainsi que les techniques algébriques qui étaient disponibles aux algébristes de l'époque. Zeuthen montra donc le chemin à partir des tangentes aux coniques dans le style d'Apollonius jusqu'au calcul infinitésimal de Barrow, et pareillement pour les problèmes de maxima et minima.

Cette approche, qui par rapport à celle des auteurs précedents est plus guidée par un intérêt proprement historique envers le contexte de la théorie, permet à Zeuthen, à la suite de Tannery, d'établir la genèse de la *méthode* de maxima et minima: la procédure décrite dans l'***Analytica*** est la première par ordre chronologique, ainsi que la plus fondée logiquement, tandis que la procédure décrite dans ***Methodus*** serait une transformation ou perfectionnement (par simplicité et applicabilité) de la première procédure. Il s'agit là de la thèse de Tannery, qui fut reprise, quoique corrigée, par la plupart des historiens contemporains.

En outre, Zeuthen prend en considération la plupart des applications de la *méthode* de Fermat et, en général, il arrive à manifester la signification moderne des procédures sans en cacher le sens géométrique. De ce point de vue, il ne manque à Zeuthen que la découverte de la ***Lettre à Brûlart*** pour parvenir à un jugement adéquat de la *méthode* de Fermat. Seulement à propos de la détermination des tangentes Zeuthen semble procéder de façon incorrecte, "forçant" cette procédure à coincider avec celle du triangle caractéristique, comme l'avait fait Duhamel. En faisant cela, il fait référence à une sécante, (qui approximerait la tangente). Cela est surprenant, puisqu'il n'y a aucun texte de Fermat sur lequel appuyer cette interpretation. Bien entendu, la version de Beaugrand suit cette approche (voir chapitre III).

6. Wieleitner

En 1929 Wieleitner reprit la discussion sur la *méthode* de Fermat exactement là où Zeuthen l'avait laissée. Ses "remarques" se présentent justement comme critique du travail de Zeuthen, dont il apprécie l'approche, sans en partager les conclusions.

Wieleitner est le premier à opérer une distinction nette entre les deux versions de la ***Analytica*** d'une part et de la ***Methodus*** d'autre part, voire à les opposer. Wieleitner souligne que la version de la ***Methodus*** procède d'un principe différent: en un mot, l'***Analytica*** dépend de la *syncrisis*, tandis que la ***Methodus*** dépend de l'*adaequatio*. Il met en évidence que l'***Analytica*** traite, tardivement (dans les années 1643 ou 1644), d'une *méthode* qui n'est pas celle que Fermat appliquait d'habitude. Les deux textes représentent donc deux approches différentes dans la pensée de Fermat aux problèmes de maximum et minimum. Si Zeuthen en avait souligné, et peut-être exagéré, l'unité, Wieleitner intervint pour en souligner les différences.

Selon Wieleitner, dans la version de la ***Methodus*** l'accroissement e de la variable n'est jamais posé égal à zéro, mais la procédure est fondée sur le développement de la fonction en puissances de e. S'agissant de maxima et minima, la règle prescrit de négliger le coefficient de cet accroissement. Il n'y a même pas de condition de petitesse sur e, car celle-ci n'est indiquée que par le terme *adaequalitas*. Ce qui compte est qu'il n'est pas question ("Ist schon gar nicht die Rede") de passage à la limite pour e qui tend à zéro. On voit que Wieleitner est le premier à pouvoir tirer avantage de la découverte de la ***Lettre à Brûlart***, et il en profite en effet: la démonstration de la *méthode* est, d'après lui, contenue dans la ***Lettre à Brûlart***, dans laquelle Fermat fait justement référence au développement de (A+E) et de (A–E) (dans la notation originelle). La version de l'***Analytica*** serait par contre une invention plus tardive, donc sans influence possible sur les autres écrits et le texte correspondant serait le dernier écrit de Fermat sur le sujet.

L'interprétation de Zeuthen aurait en somme, selon Wieleitner, deux limites: une externe, c'est à dire le fait qu'il ignorait la ***Lettre à Brûlart***, publiée seulement en 1922, et une interne, qui consiste à présenter la version de l'***Analytica***, qui ne paraît qu'une fois et (d'après Wieleitner, mais son avis n'est pas partagé) contient une division par zéro, comme le fondement de l'autre version, ou de la *méthode* en général: "als den alleinigen Sinn von Fermats Methode". En outre, selon la datation de Tannery (O.F.I) l'***Analytica*** serait la dernière version de la *méthode*, donc moins significative pour en établir la genèse.

Wieleitner, comme Tannery mais pour d'autres raisons, critiqua aussi la référence au "principe de Kepler" comme fondement de la *méthode* de Fermat et il cite à ce propos Montucla, Duhamel et Hoppe[36]. Là encore, nous en voyons la raison surtout dans le choix du texte ou de la version principale de la *méthode* car, comme nous l'avons répété, la "principe de Kepler" n'est qu'une interprétation de la version de la ***Methodus*** et ne fonde ni la ***Analytica*** ni la ***Lettre à Brûlart***. Il faut remarquer cependant qu'assumer cette dernière comme le fondement de la *méthode* de Fermat ne fait que déplacer la question historique des problèmes de différentiation aux questions d'histoire de la notion de fonction. Il est certain que le développement en série de puissances ne devint un fait acquis que vers la deuxième moitié du XVIIe siècle; quant à l'usage qu'en fait Fermat, Mahoney [82] propose de le voir comme une conséquence de la lecture de la ***Géométrie*** de Descartes de la part de Fermat: quoiqu'il ne s'agisse que d'une conjecture, cela montre avec quelle précaution il faut procéder dans l'attribution de cette notion. Nous avons pu en prendre conscience en considérant les problèmes qui surgissent à la lecture de la ***Lettre à Brûlart***.

De toute manière, le fait d'attribuer le rôle central au développement en série de puissances oriente correctement Wieleitner à propos de la dépendance de la procédure des tangentes par rapport à la *méthode* de maxima et minima. Wieleitner affirme que Descartes ne comprit pas Fermat sur ce point, puisque Fermat s'était borné à déclarer que l'on peut faire remonter la procédure des tangentes à la *méthode* de maxima et minima, mais non pas que la détermination des tangentes puisse être traitée comme

---

[36]Wieleitner [70] cite en effet l'article de E. Hoppe ***Zur geschichte der Infinitesimalrechnung bis Leibniz und Newton***, publié dans le "Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung" XXXVII, 1928, pp.148–187, qui se borne à citer la *méthode* de Fermat.

un cas de valeur extrême: il faut remarquer que la distinction est peut-être un peu trop subtile. Probablement le point de vue de Wieleitner lui suggéra de considérer, en analogie avec l'approche moderne, les valeurs extrêmes et les tangentes comme deux moments de l'application d'une même notion mathématique, celle du développement en série de puissances de **e** .

Wieleitner conclut, d'autre part, que le problème de la détermination de la tangente peut être considéré comme un problème de valeur entrême, soit en voyant la tangente comme un cas de minimum puisque l'on minimise la tangente trigonométrique (de l'angle avec la subtangente), soit parce que l'on minimise l'angle correspondant. En outre, Wieleitner s'aperçoit de l'erreur de Zeuthen à propos de la détermination des tangentes, car il lui reproche d'avoir présenté comme procédure des tangentes de Fermat la version que Beaugrand en avait donné. Il faut remarquer cependant que le texte de Beaugrand aussi appartient au ***Supplément des Oeuvres de Fermat***, qui ne fut publiée par De Waard qu'en 1922, ce qui empêcha probablement Zeuthen d'identifier correctement la méthode de tangentes de Fermat. En outre, en polémique avec Zeuthen, Wieleitner exclut que Fermat ait fait usage du triangle caractéristique dans la détermination des tangentes des courbes algébriques: on peut en parler seulement en relation avec la procédure qui étend la *méthode* aux courbes transcendantes.

7. Itard

Itard est un auteur très important dans l'histoire des études sur Fermat, ce dont témoigne le recueil récemment édité [75]. Nous allons prendre en considération deux essais, le [71] et le [73]. Le premier, malgré le titre très indicatif de ***Fermat précurseur du calcul différentiel*** et quelques abus de notation, n'exagère pas la nouveauté et l'importance historique des apports de Fermat au calcul différentiel, car il ne manque pas de souligner également les limites de son cadre conceptuel et du contexte d'application de ses découvertes. Une contribution fondamentale d'Itard est son explication détaillée de la détermination des tangentes aux courbes transcendantes. Le premier, il chercha dans d'autres écrits de Fermat (outre ses textes consacrés à la détermination des tangentes) la justification des principes additionnels à la procédure des tangentes qui permirent à Fermat d'étendre la procédure aux courbes non algébriques.

Itard analysa l'essai de Fermat ***De linearum curvarum cum lineis rectis comparatione dissertatio geometrica***, ce qui lui permit d'intervenir sur une question centrale, tant pour la possibilité de reconnaître une technique unitaire pour tous les problèmes de tangentes que pour l'éclaircissement d'une comparaison avec Descartes. En ce qui concerne le premier point, il est important, en effet, de décider s'il existe une technique unitaire qui aurait guidé Fermat dans toutes les déterminations de tangentes. En effet ces déterminations, présentées dans ses écrits cas par cas, ont l'apparence de faire usage de techniques "ad hoc", surtout si elles sont comparées avec les algorithmes du calcul infinitésimal qui paraissent dans la deuxième moitié du XVIIe. Il fallait en somme démontrer que la procédure des tangentes de Fermat ne dépend pas de la propriété (ou équation) de la courbe, malgré ce qui soutenait Descartes dans sa polémique. C'est seulement à partir de cette certitude que l'on pouvait ensuite se poser la question du fondement de cette procédure des tangentes, ainsi que de sa possibilité d'application dans le contexte des courbes connues à l'époque. De même, cela permettait de développer la comparaison entre la procédure des tangentes de Fermat et celle de Descartes, en ce que la première était susceptible d'une extension aux transcendentes, contrairement à la deuxième.

Itard travailla donc sur la genèse de l'extension de la *méthode* aux transcendantes et conclut: "C'est véritablement là qu'il faut voir le fondement, algorithme en moins, du calcul différentiel."[37] On reconnait ici, aussi bien que dans le titre de l'essai, le style historique rétrospectif de la génération d'Itard. Il faut noter qu'effectivement déjà Duhamel et Zeuthen avaient vu ici l'introduction d'une forme de triangle caractéristique.

En ce qui concerne la question du fondement de la *méthode* de maxima et minima, Itard suit Tannery en affirmant que la découverte de

[37]Itard [73], dans [75] p. 213.

l'***Analytica*** est définitive par rapport à la question, en tant que déclaration de Fermat lui-même sur l'origine de sa *méthode*. En outre, Itard considère l'écrit ***Analytica*** comme suffisant pour expliquer mathématiquement le processus théorique originaire suivi par Fermat dans sa découverte.

En polémique directe avec Montucla Itard affirme donc, en premier lieu, que la *méthode* Fermat n'était pas fondée sur le "principe de Kepler" et que, en deuxième lieu, Montucla se trompait en déclarant[38] que la propriété de l'extrêmum selon laquelle quand l'ordonnée est arrivée à une valeur extrême il y a de part et d'autre deux ordonnées qui s'approchent d'elle et qui sont égales "n'est pas celle qui préside à la règle de Fermat". Contrairement à Montucla, Itard considère donc l'exposé de Huygens de la *méthode* de Fermat comme fidèle, dans la substance, au procédé de son inventeur. Outre la simple citation du passage de ***Analytica***, Itard souligne à ce propos un aspect intéressant: Fermat donne dans ce texte seulement l'analyse, et non pas la synthèse. En tant qu'analyse, la démonstration est adéquatement explicite, et est basée sur le principe que Tannery fait remonter à Pappus, c'est à dire que près de l'extrêmum il y a deux valeurs égales de l'ordonnée, ce qui est une condition nécessaire pour l'extrêmum. Cependant, Fermat ne donne pas de condition suffisante. En outre Itard, qui suit ici l'indication de De Waard[39], ainsi que l'interprétation de Wieleitner, attribue à la ***Lettre à Brûlart*** le caractère d'une quasi-démonstration, c'est-à-dire d'une synthèse.

En ce qui concerne la procédure des tangentes, Itard met en évidence comment la notion de tangente possédée par Fermat était classique et jusqu'à quel point cela détermina l'argument donné pour sa *méthode*. Fermat affirma en effet[40] que son point de départ avait été l'approche d'Apollonius au Livre V des ***Coniques***: d'abord déterminer la normale à un point P de la courbe, définie comme segment minimum d'un point donné du diamètre à la

[38]Voir Montucla [62] t. II, p. 113.

[39]O.F. Suppl., p.121.

[40]O.F. II, pp. 158-161, ***Méthode expliquée***.

courbe, ensuite déterminer la perpendiculaire à la normale: en effet un théorème démontre que cette perpendiculaire est tangente à la courbe. Mais Fermat s'aperçut vite que cette approche impliquait des difficultés de calcul, notamment des racines carrées: il parvint donc à la procédure des tangentes qui ne fait pas de référence à la normale et qui ne comporte pas de problème d'extrêmum comme tel. Il n'y a que la procédure algébrique qui porte la trace de l'extrêmum. Ce point est encore un sujet de différentes interprétations. Mahoney, par exemple, pense plutôt que Fermat nous donne lui-même une reconstruction rationalisée de l'origine de sa procédure des tangentes. Selon Mahoney, Fermat aurait appliqué sa procédure des maxima aux tangentes sans une conscience profonde du rapport entre les deux genres de problèmes. Seulement plus tard, pour corriger l'erreur de Descartes qui avait proposé de voir la tangente à la parabole comme un problème de maximum, Fermat aurait fait appel à l'autorité d'Apollonius. Il montra donc que si, à la suite d'Apollonius, on regardait la détermination de la tangente comme un problème de minimum, on pouvait retrouver par sa *méthode* le résultat attendu.

Itard fit aussi quelques remarques à propos de la diffusion de la *méthode* de Fermat. Il remarqua que Beaugrand et Huygens donnèrent deux présentations de la *méthode* de Fermat, chacun d'entre eux ajoutant quelque chose à la procédure originelle. En particulier, les deux auraient fait usage de l'idée intuitive que la tangente est un cas limite de sécante. Cela ne correspond évidemment pas à l'inspiration de Fermat pour la procédure des tangentes, cependant, remarque Itard (et sur ce point son point de vue n'est pas partagé actuellement), leur interprétation n'est que partiellement erronée: en effet, cela est plutôt le fondement intuitif de la *méthode* de maxima et minima.

8. Whiteside

Le texte de Whiteside mérite qu'on en dise quelques mots, à cause de son importance, même s'il ne s'inscrit pas directement dans la littérature critique sur Fermat.

Whiteside distingue entre l'approche de Fermat et l'approche de Descartes. Dans l'approche de Fermat, on prendrait en considération le point de coïncidence "à la limite" de l'ordonnée et de la tangente correspondente. En revanche, la *méthode* de Descartes prend en considération la rencontre de la "corde limite" avec l'abscisse. La *méthode* de Fermat est jugée inférieure à celle de Descartes, en ce que cette dernière aurait une plus grande possibilité d'application. Whiteside juge aussi que la procédure de Descartes est celle qui sera transformée pour devenir la méthode complètement générale du calcul différentiel. Il conclue disant de cette *méthode*:

> ...it had the practical advantage of substituting a limit position of the subtangent XT for the rather clumsy introduction of the Fermatian inequality which tends to equality in the limit.(p.357)

En somme, Whiteside opère des choix qui déterminent son jugement à propos de la *méthode* de Fermat. Il privilégie la tradition anglaise, et par conséquent il ne tient pas compte de deux renseignements à propos de Leibniz: d'abord, que Leibniz apprit la *méthode* de maxima et minima de Huygens, donc il apprit la version de Huygens de la *méthode* de Fermat; ensuite, que Leibniz explique ce en quoi il est redevable à Fermat dans son essai ***Historia et origo calculi differentialis***, tout en montrant que sa connaissance n'était pas directe. En outre, Whiteside est orienté vers l'établissement des notions de limite et de dérivée, ce qui lui fait privilégier les déterminations des tangentes par rapport aux déterminations de maxima et minima, qui ne sont vues que comme conséquences des premières. D'ailleurs, en cela il ne fait que suivre celui qu'il considère le vrai précurseur, à savoir Descartes.

On peut donc conclure que Whiteside néglige la transmission de la *méthode* de Fermat par Van Schooten et Huygens: pourtant, Newton lui-même affirme d'avoir connu la *méthode* de Fermat par la ***Geometria*** de Van Schooten en 1664.

9. Schneider

Ivo Schneider a donné le compte rendu le plus complet, après celui de Duhamel, de la querelle entre Descartes et Fermat à propos de la méthode. Cependant on ne peut, à proprement parler, lui attribuer une thèse interprétative sur la *méthode* de Fermat, car il ne traite des procédures de Fermat que de façon secondaire, privilégiant les réactions de Descartes et les réélaborations et commentaires proposés par lui, ainsi que les discussions d'Etienne Pascal et Roberval sur le sujet. Au contraire, la présentation de cette *méthode* est réduite à son reflet dans le débat qui commença avec l'envoi à Paris de la ***Methodus***. Par exemple, il se trouve que dans ce texte Fermat donna l'application de la *méthode* à la détermination des tangentes, mais ne mentionna pas l'extension aux courbes transcendentes, ni la procédure qui fait usage de la normale, mais Schneider prend en considération seulement la détermination de la tangente que l'on trouve dans la ***Methodus***.

Le texte de Schneider est structuré en reprenant les différentes tentatives de Descartes de falsifier la *méthode* de Fermat. La première[41], la plus célèbre, échoua. Sur ce point intervinrent, outre Fermat, Etienne Pascal et Roberval. Les défenseurs de Fermat, et Fermat lui-même, mirent en évidence[42] que le résultat obtenu par Descartes n'était pas faux, mais solution d'un autre problème. En étudiant l'example de la parabole,

[41]O.F. II, p. 126-132.

[42]Voir O.F. II, pp. 154-162, c'est-à-dire la ***Méthode expliquée***.

Descartes se proposait en effet d'en déterminer la tangente par la *méthode* de Fermat. Dans ce but, il pensa maximiser la distance d'un point externe à la parabole, mais situé sur le prolongement du diamètre. Cependant, les calculs n'amènent pas à la tangente, ce qui fit conclure Descartes que la *méthode* ne s'appliquait pas. Ses critiques réagissèrent en montrant que le résultat de Descartes était en réalité la normale, mais que le problème était mal posé, puisqu'on sait par Apollonius que la normale est un cas de minimum et non pas de maximum. Quant à la deuxième tentative de falsification de la *méthode* de Fermat, Descartes proposa[43] le problème suivant:

> Soit donné le cercle BDN et que le point E qui en est dehors soit aussi donné et qu'il faille tirer de ce point E vers ce cercle une ligne droite, en sorte que la partie de cette ligne qui sera hors de ce cercle entre sa circonférence et le point donné E soit la plus grande.

Descartes, appliquant la *méthode* de Fermat, parvint à une expression qui ne contenait pas l'inconnue et pensa donc avoir trouvé un problème exclus du domaine d'applicabilité de la *méthode* de Fermat. Au point de vue moderne, il s'agit des extrémités. En effet, il peut y avoir extrêmum dans les extrémités, mais la *méthode* de Fermat ne le détermine pas, ni est en mesure de distinguer un point de rebroussement. On ne sait pas jusqu'à quel point Fermat saisit l'objection, ni d'ailleurs si Descartes était conscient de la question. Il n'y a pas de réponse univoque et définitive. Schneider non plus ne donne pas de réponse mais, tout en évitant d'analyser le développement de la *méthode* de Fermat, il ne mentionne pas la non pertinence de la critique de Descartes par rapport à l'***Analytica***. Il suggère pourtant, à bon droit, que les deux mathématiciens n'avaient compris qu'à demi la portée du problème des extrémités.

En général, toutes les critiques de Descartes avaient une raison d'être, parce qu'elle soulignaient des point cruciaux de la *méthode*. Que l'on pense par exemple à la précision sur la distinction entre maximum et minimum, ou

[43]O.F. II, p. 140-143.

entre maximum et minimum relatif et absolu. Pour quelques-unes de telles critiques Fermat répondit par la ***Lettre à Brûlart***. Il répondit au contre-exemple du point de rebroussement en changeant la quantité dont il fallait trouver l'extrêmum, et proposa encore de chercher un minimum au lieu d'un maximum. Cela résoud la question seulement en partie. De toute manière, il faudrait comparer à fond l'approche cartésienne et l'usage correcte de la *méthode* de Fermat, que Descartes ne connaissait pas parce que la simple procédure de ***Methodus*** ne l'explique pas. D'un point de vue moderne, comme le souligne Schneider, tant la solution de Fermat que la variante proposée par Descartes sont insuffisantes: au fond ils s'accordent à croire que la *méthode* peut s'appliquer à tous les problèmes, quoiqu'il soit nécessaire de choisir de façon opportune la quantité variable dont il faut trouver la valeur extrême. En cela, comme le note Schneider, ils ne se détachent pas de la connaissance du concept de fonction et de l'univers des fonctions propres à la première moitié du XVIIe.

10. Stromholm

A partir de l'année 1960 furent publiés plusieurs travaux sur Fermat, dont des interprétations de la *méthode* de Fermat, qui essaient d'aboutir à une thèse définitive. A ce groupe appartient l'essai de Bachmakova, qui suggéra le rapport entre des problèmes de Diophante et des problèmes de maxima et minima de Fermat en réinterprétant les deux auteurs en termes de géométrie algébrique. De grande importance furent les travaux de Hofmann, qui établit plusieurs renseignements importants au sujet des mathématiques de Fermat. A propos de la *méthode*, il souligna le rôle du problème d'Apollonius cité par Pappus comme Lemme 21, Prop.61 des ***Collectiones Mathematicae***, dans la conception de la *méthode*, ainsi que l'application de la *méthode* à la détermination de la loi de réfraction. Nous nous bornons à cette référence parce que d'une part il ne participa pas directement à la tradition de débat sur la *méthode* de Fermat, et d'autre part

à cause de son influence sur Stromholm et Mahoney, qui ont adopté et explicité ses découvertes dans leur effort de déterminer le fondement de la méthode. Ces deux auteurs ont repris tous les textes et les études précédentes dans le but d'établir quelle version doit être considérée comme celle exposant la *méthode* de Fermat et quel est son fondement. D'abord parut l'essai de Stromholm, ensuite celui de Mahoney, en tant que quatrième chapitre de [82]. Puisque l'essai de Mahoney est le point de départ de beaucoup de mes analyses et a été rappelé à plusieurs reprises, je n'en donnerai pas un compte-rendu ici. Nous verrons plutôt l'essentiel de la thèse de Stromholm.

Stromholm commence son essai par une affirmation qui semble refléter la tradition sur le principe de Kepler:

> It is well known that Fermat was the first to use the characteristic behaviour of an algebraic expression near its extrema as a criterion for the determination of these extrema.

En effet, le premier historien qui pratiqua son art avec honnêteté est, pour Stromholm, Wieleitner, qui affirma qu'il n'y a pas une *méthode* de Fermat, mais deux. La première est celle décrite dans la ***Lettre à Brûlart***, dont la ***Methodus*** est une tentative peu réussie, tandis que la deuxième est décrite dans l'***Analytica***. Cela est le point de départ de la recherche de Stromholm, qui considère ces deux groupes de textes de Fermat tout simplement incompatibles. Le seul problème de Wieleitner fut qu'il accepta la chronologie de Tannery. Par conséquent, l'***Analytica*** devait être la description tardive de la dernière version de la *méthode*. En revanche, affirme Stromholm, la version de la *méthode* qui a toute les apparences de bien représenter l'intuition originelle est précisément celle de l'***Analytica***. Stromholm donne de bonnes raisons d'ordre historique pour dater l'***Analytica*** de 1638, et pour constituer la ***Lettre à Brûlart*** comme l'aboutissement d'un processus de recherche d'une bonne démonstration de la procédure qui y est expliquée. Telle est la conclusion de Stromholm, tandis que son argument est beaucoup plus complexe et riche en suggestions. Nous reviendrons sur les aspects de ses résultats que nous considérons comme acquis.

11. Conclusion

Il nous faut maintenant essayer de résumer notre position. Plusieurs points nous rapprochent de Stromholm, notamment:

1) si nous voulons identifier un écrit de Fermat avec "la *méthode*", il faut choisir la ***Lettre à Brûlart***;

2) il faut prendre au sérieux l'usage de *adaequatio* de la part de Fermat. Il ne s'agit pas d'une façon de parler, mais d'une façon connue ou reconnaissable de procéder que Fermat appliqua dans un nouveau contexte;

3) l'***Analytica*** représente le stade originel de la *méthode*.

Pourtant, ses arguments contre la chronologie de Tannery et pour une datation de l'***Analytica*** de 1638 doivent être évalués par rapport aux arguments de Mahoney, qui parvient à dater cet écrit de 1640. En outre, nous partageons les remarques de Mahoney à propos de la correction apportée par Fermat lui-même à la procédure, trop peu souple, de l'***Analytica***. Il s'agit d'une véritable moment de transition entre la procédure de l'***Analytica*** et de la ***Methodus***, car Fermat écrit:

> Puisque e (ainsi que a) est une quantité inconnue, rien n'empêche de la dénoter par a+e.

Cela lui permet d'abord de simplifier les divisions, mais, plus en général, de transformer sa procédure en une technique plus facile à manier.

Dans la substance, nous trouvons plus adéquate l'interprétation de Mahoney parce qu'elle tient compte de toutes les procédures et parvient à les mettre en rapport. Cela indique que cet auteur a atteint une meilleure compréhension historique, d'autant plus que Fermat ne paraît en aucun sens gêné par la multiplicité de ses procédures, comme si elles étaient incompatibles.

Quant au fondement de la ***méthode***, nous en reparlerons au chapitre III. Il suffit de remarquer ici que par rapport au deux principes que Fermat aurait pu utiliser, celui de Kepler et celui de la racine double, nous privilégions celui de la racine double, qui est rappelé par Fermat tant dans l'***Analytica***, (où il est expliqué dans la forme de l'idée de Pappus sur l'unicité de l'extrêmum, et de la *syncrisis* applicable aussi au cas de l'extrêmum) que dans la ***Lettre à Brûlart***[44].

[44] Pourtant l'autre interprétation a encore de l'autorité: dans un essai de 1984, Enrico Giusti a repris la thèse d'après laquelle "Le point de départ est la constatation que dans le voisinage d'un extrêmum a les variations sont insensibles." Voir [104].

CHAPITRE II

EXTENSIONS ET APPLICATIONS DE LA METHODE

Première partie: procédures et applications

Dans le premier chapitre nous avons vu les différentes versions pour maxima et minima "formellement", car nous n'avons pas pris en considération le contexte des mathématiques de l'époque, ni des références historiques, comme la mathématique d'Apollonius. Dans ce chapitre ces références seront tracées au moins en grandes lignes, puisque pour étudier, selon le but du chapitre, le domaine d'application de la *méthode* de Fermat, il faut rendre compte de ce que Fermat considérait comme le domaine des problèmes qu'il devait résoudre.

1. Les maxima et minima

L'ensemble des problèmes résolubles par la *méthode* était pour Fermat la version moderne, c'est-à-dire algébrique, "en notes", de problèmes appartenant à l'*analyse* des Grecs[1]. Si du point de vue des problèmes traités ensuite par l'intégration les Grecs possédaient la méthode d'exhaustion comme méthode unitaire, aucune technique ne traitait tous les problèmes que nous incluons dans le calcul différentiel. Par exemple, les problèmes de maxima et minima et les problèmes des tangentes étaient tout à fait

---

[1]Dans l'enorme bibliographie sur l'analyse géométrique grecque, je mentionnerai ici seulement Mahoney [113] qui souligne l'importance du corpus de l'analyse, l'ensemble des théorèmes préparatoires à la trasformations des problèmes pour arriver à leur solution, et Hintikka-Remes [108], qui met en évidence l'aspect logique de l'analyse, de Platon à Proclus à l'*ars analytica* de Viète.

distincts[2], au moins jusqu'à Apollonius, même dans leur conception et après lui dans leur solution[3]. D'une part, il y avait les problèmes isomètres, par exemple isopérimètres, étudiés comme classe de problèmes déjà par les Pythagoriciens, et d'autre part il y avait les problèmes de tangente et de normale. D'ailleurs, même à propos des tangentes et des normales, Apollonius ne réussissait à les déterminer que par des techniques distinctes, selon la propriété de la courbe. Je peux donc anticiper sur le prochain chapitre que le fait de pouvoir traiter ces problèmes dans un même contexte et par les mêmes techniques créait une surprise légitime chez Fermat. Et si notre approche nous amène à souligner l'importance de la généralité, c'est-à-dire, par exemple, la nécessité qu'une procédure s'applique à toutes les courbes, pour des mathématiciens comme Descartes et Fermat l'aspect "intéressant" était que la procédure s'applique à des problèmes aussi distincts. Cela provient d'une des principales différences entre notre pensée algébrique et celle de Fermat (ou Descartes et leurs contemporains): l'absence de conceptualisation fonctionnelle. Pour Fermat, comme pour ses contemporains, les maxima et minima n'étaient pas les points critiques, parce que les courbes n'étaient pas le graphe d'une fonction. Cependant on peut supposer que, à mesure que Fermat apprenait à penser en termes de la forme de géométrie analytique qu'il avait inventée, le rapport devint clair.

Dans les textes classiques il y avait pourtant une notion qui définissait une classe de problèmes contenant extrêma, tangentes, normales: la notion de *diorismòs*. Ce terme signifie détermination, et en effet était traduit par *determinatio* pendant le Moyen Age et le XVIe siècle (on le retrouvera encore chez Huygens). Il avait deux usages: le premier, typiquement euclidien, selon lequel le *diorismòs* est la partie de la proposition géométrique qui spécifie les données du théorème. L'autre, présent dans Euclide, mais aussi dans Apollonius, Archimède et Pappus, indiquait comme *diorismòs* ce que *nous* appellerions la "discussion" (d'une équation, par exemple), c'est-à-dire les conditions qui marquent les limites de validité du théorème ou de possibilité du problème.

[2]Cette remarque, ainsi qu'une discussion de toute la question, a été faite par Zeuthen [127]. Voir aussi Tropfke [124].

[3] Voir par exemple la proposition XLIX du livre II de Apollonius, *Les coniques* [3].

Quand Fermat, ayant maîtrisé l'algèbre de Viète[4], aborda les problèmes que Pappus avait définis difficiles, il s'agissait justement des *diorismòi*, c'est-à-dire des problèmes de maxima, minima, tangentes, normales, et tout autre problème qui dépend d'une condition limite ou qui peut être réduit à un telle condition.

On a d'ailleurs déjà rencontré le terme *diorismòs* précisément dans la pièce ***Analytica***, où Fermat raconte la genèse de la *méthode*. Il s'agit donc de concevoir les procédures du premier chapitre non pas comme des versions de la procédure pour maxima et minima mais des versions de la procédure pour *diorismòi*. C'est exactement dans ce contexte que la dispute avec Descartes sur la priorité des extrêma par rapport aux tangentes a son sens le plus vaste[5].

Dans le but d'avoir une idée plus claire du domaine d'application de ces procédures nous donnerons dans ce chapitre la liste des problèmes effectivement traités par Fermat. La première section de la liste comprendra seulement les maxima et minima. Une deuxième section comprendra les tangentes, avec la procédure et les courbes traitées par Fermat, incluant les modifications pour les courbes transcendantes. Des applications plus "inattendues" seront discutées dans une autre section, et on terminera le chapitre par l'application la plus inattendue: la détermination des centres de gravité. La notation sera mixte, verbale ou contemporaine (fonctionnelle), par brièveté; **a**, **b**, **c** représentent des constantes.

[4]Dans les limites de ce travail je ne peux pas développer la discussion de la période d'apprentissage de Fermat à Bordeaux, ni de ses premiers travaux de ce que nous appelons géométrie analytique. Tout cela, avec une ample description de l'approche de Viète, de son programme d'application de l'algèbre au problèmes géométriques se trouve d'ailleurs dans deux ouvrages de M. Mahoney [112] et [113]. Son approche en histoire de l'algèbre et sa présentation des mathématiques de Fermat constituent mon point de départ.

[5]Déjà Montucla, dans son [62] donna une présentation de cette querelle, de priorité, de style, mais aussi de contenu. Plus récemment, Schneider en a fait l'objet d'un examen très approfondi et efficace. Voir Schneider [81].

Table 1
Problèmes traités par Fermat comme exemples d'application de la procédure de maxima et minima

---

1) problème d'Euclide: trouver le maximum de $x(a-x)$; (1636, ***Methodus***)

2) problème d'Archimède: trouver le maximum de $x^2(a-x)$ (1638, ***Volo mea methodo***)

3) problème d'Apollonius: trouver le minimum de

$$\frac{(a+x)(b-x)}{x(c-x)}$$; (1636, ***Analytica***)

4) (Fermat) Etant donnés trois points, en trouver un quatrième, tel que la somme des distances des trois points donnés soit minima; (énoncé seulement en 1640, ***Analytica***)

5) Etant donnée une demicirconférence de diamètre AB, avec la perpendiculaire DC au diamètre, on demande le maximum de la somme AC + CD; autrement dit, trouver le maximum de $a+\sqrt{ba-a^2}$ (1644, ***Appendix***)

6) Trouver le maximum de $a \times \sqrt{ba-a^2}$ (ibidem)

7) Trouver le cône de surface maxima inscrit dans une sphère donnée (annoncé à Mersenne, 1636; publié dans ***Appendix***, 1644)

8) Trouver le cylindre de surface maxima inscrit dans une sphère donnée (annoncé à Mersenne, 1636; envoyé à Mersenne, 1642)

9) Trouver le cône de surface maxima inscrit dans un cylindre donné

10) Trouver le plus grand cône de tous ceux qui auront la surface conique égale à un cercle donné (proposé par Mersenne en 1629)

11) Etant donné un nombre quelconque de points et un nombre quelconque de droites ou de courbes, trouver un nombre quelconque de points dans une droite quelconque, de façon telle que la somme des carrés des droites qui unissent les points donnés et les points cherchés soit minima ou maxima (1638, ***Volo mea methodo***)

12) Etant donné un point à l'intérieur ou à l'extérieur d'une parabole, tracer une droite qui en recoupe un segment égal à une aire donnée. Et si le point est à l'intérieur, déterminer l'aire minima qui puisse être recoupée de la parabole par le point fixé (annoncé à Roberval, 1640)

---

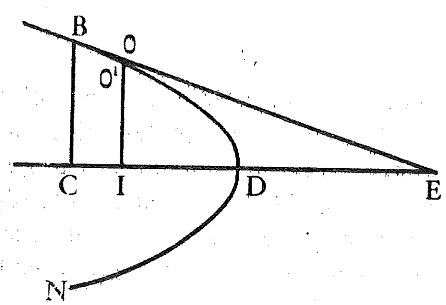
2. Les tangentes

Nous allons prendre en considération la principale application de la *méthode* de Fermat, c'est-à-dire les tangentes. Il n'y a pas, ici, de question sur les différentes versions de la procédure, puisqu'il n'y en a qu'une, présentée d'abord dans la pièce ***Methodus***, et ensuite répétée dans les autres écrits, où de nouvelles courbes sont prises comme exemples d'application. Pour une question de style, nous allons choisir celle de la ***Doctrinam tangentium***.

Comme pour les procédures de maxima et minima, on commencera par le texte de Fermat, pour passer ensuite à une version moderne, en forme algorithmique, de la procédure.

Fermat écrit dans ***Doctrinam tangentium***:

La ***Méthode pour trouver le maximum et le minimum*** précède la doctrine des tangentes, et c'est grâce à cette méthode que les questions des diorismoi ont été résolues, et ces célèbres problèmes qui, selon Pappus, Livre VII, Préface, ont des déterminations difficiles, trouvent très facilement une détermination. Les lignes courbes dont nous cherchons la tangente sont soit celles dont les propriétés s'expriment par moyen de lignes droites, soit celles dont les propriétés s'expriment par moyen de courbes et de droites de façon quelconque. (...) En effet, considérons deux droites quelconques données en position dans le plan d'une courbe. Nous supposons alors que la tangente à un point donné de la courbe soit connue, et nous considérons, *per adaequalitatem*, la propriété spécifique de la courbe, non plus sur la courbe, mais sur la tangente; après, il faut effacer les homogènes comme le prescrit la règle de maximum et minimum, et nous avons l'égalité qui détermine le point de rencontre de la tangente et du diamètre, donc de la tangente elle même. (O.F.I, p.159. C'est moi qui souligne)



La procédure de Fermat pour la détermination des tangentes peut se résumer comme suit:

1) On considére deux droites, données en position[6], dans le plan de la courbe (nous considérons ici le cas de la parabole, proposé par Fermat). Nous appelons l'une diamètre, l'autre appliquée.

2) On suppose le problème résolu, c'est-à-dire que la tangente à un point donné B de la courbe soit trouvée.

3) On choisit arbitrairement un point O sur la tangente, et l'on trace par O la parallèle à l'appliquée de B, BC. Cette parallèle, OI, rencontrera la courbe en un autre point, O', et on aura OI'<OI (ou, selon la concavité ou la convexité de la courbe par rapport aux axes, OI'>OI).

4) On établit la proportion des triangles semblables et l'on parvient ainsi à un rapport entre des portions du diamètre qui déterminent la valeur de OI.

5) On écrit l'équation de la courbe en remplaçant O'I par OI, c'est-à-dire "nous considérons par adégalité la propriété spécifique de la courbe non plus sur la courbe mais sur la tangente à trouver" (O.F.III, p.141)

6) On assigne des "notes algébriques": **A** est la soustangente à chercher; **e** est le segment du diamètre compris entre les deux parallèles, et ainsi de suite pour les données.

7) On élimine les termes comme le prescrit la procédure de maxima et minima. On arrive ainsi à une égalité qui détermine le point de rencontre de la tangente avec le diamètre et par conséquent la tangente elle-même.

---

[6]En géométrie d'Apollonius jusqu'à la "géométrie analytique" de Fermat et Descartes cette expression signifie que les deux droites de référence forment un angle donné, par example, droit.

Fermat écrit dans la *Methodus*:

> Nous ramenons à la méthode précédente l'invention des tangentes en des points donnés à des courbes quelconques. Soit données, par exemple, la parabole BDN, de sommet D, de diamètre DC; soit donné sur elle le point B, par lequel il faut mener la droite BE tangente à la parabole et rencontrant le diamètre en E. Si l'on prend sur la droite BE un point quelconque O, dont on mène l'ordonnée OI, en même temps que l'ordonnée BC du point B, on aura que le rapport de CD à DI est plus grand que celui du carré BC au carré OI, parce que le point O est en dehors de la parabole; mais, à cause de la similitude des triangles, BC est à OI carré comme CE carré est à IE carré; par conséquent, le rapport de CD à DI sera plus grand que celui de CE carré à IE carré. Or le point B est donné, donc l'ordonnée BC, donc le point C, donc CD. Soit donc CD aequalis D, donnée. Posons que CE soit à et CI soit E. On aura alors que D est à D-E dans un plus grand rapport que Aq à + Eq - A in E bis.On multiplie les moyens avec les extrêmes:
>
> D in A q + D in E q - D in A in E bis
>
> sera plus grand que
>
> D in A q - A q in E.
>
> L'on compare par adéquation selon la méthode précédente. Après avoir éliminé les termes communs, on obtiendra: D in E q - D in A in E bis *adaequabitur* - A q in E, ou, ce qui revient au même:
>
> D in E q + A q in E *adaequabitur* D in A in E bis.
>
> On divise tous les termes par E , donc:
>
> D in E + A q *adaequabitur* D in A bis.
>
> On élimine D in E, donc:
>
> A q *aequabitur* D in A bis, donc A *aequabitur* D bis.
>
> Nous avons ainsi démontré que CE est double de CD, ce qui est vrai.

> *Nec unquam fallit methodus.*(O.F.I, pp.134-136)

Nous donnons maintenant une liste des courbes dont Fermat détermina la tangente. Ici la notation est moderne, et la classification est mixte (mais de façon compatible).

Table 2
Courbes traitées par l'application de la *méthode* *à la détermination des tangentes*

Courbes algébriques:

Lieux plans:

- **circonférence**

Lieux solides:

- **sections coniques (Menechme, autour du 350 a.C.)**

Cubiques:

- **cissoïde (Dioclès, autour du 180 a.C.), c'est-à-dire, $y^2(a-x) = x^3$; classiquement, pour $x>0$ et $x<a$**

- ***folium* de Descartes (1638), $y^3 = 3ay-x^3$**

- **parabole de Descartes (1637), c'est-à-dire: $pxy = -x^3-ax^2+bpx+pab$**

Quartiques:

- concoïde (Nicomède, autour du 180 a.C.), c'est-à-dire $x^2y^2 = (b^2-y^2)(y+a)^2$, pour $b>a$

- ovale de Descartes (1637), c'est-à-dire

$$y = a\sqrt{\cos\frac{x}{r}}$$

Ordre quelconque:

- paraboles de Fermat (1636), $y^n = p^{n-1}x$, avec n entier positif

- hyperboles de Fermat (1636), $x^ny^p = a^{n+p}$, avec n,p entiers positifs

Courbes transcendantes:

- trisectrice de Hyppias (420 a.C.)

- quadratrix de Dynostrate (350 a.c.)

- cycloïde $x = a\vartheta - b\sin\vartheta \quad y = a - b\cos\vartheta$

- spirale d'Archimède

$$\rho = a\vartheta$$

- spirale de Fermat

$$\rho^2 = a\vartheta$$

- spirale logarithmique de Descartes $x^2+y^2 = \exp(2a \operatorname{arctg} y/x)$, ou

$$\rho = e^{2a\vartheta}$$

Fermat appliqua sa *méthode* à toutes les courbes décrites ici, mais pour les transcendantes il fut obligé d'ajouter un sorte de lemme, comme il expliqua dans ***Doctrinam tangentium*** (1638):

> Pour éviter les asymmétries, on peut remplacer les ordonnées des courbes par les ordonnées des tangentes (...) et les arcs des courbes par les longueurs correspondantes des tangentes trouvées.

Fermat avait déjà annoncé ce résultat dans quelques lettres à Mersenne de 1638, mais ne donna la démonstration de ce lemme que beaucoup plus tard, en 1660, dans l'essai ***De linearum curvarum cum lineis rectis comparatione dissertatio geometrica***. Cet essai fut publié du vivant de Fermat dans le traité de Lalouvère sur la cycloïde, et Itard en traite amplement [71].

Ce lemme permit à Fermat de trouver la tangente aux courbes transcendantes connues, comme la cycloïde, mais aussi à d'autres courbes de définition complexe, contenant des radicaux. Fermat donna la définition de deux courbes de ce genre, qui sont pourtant algébriques. La première est décrite de la façon suivante:

> Soient autant de courbes que l'on voudra de même sommet B, comme BE, BD, BF, BA, données par position, et soit marquée une autre courbe de même sommet, comme MB, en sorte que les appliquées de cette dernière, comme MC, soient moyennes proportionnelles entre la somme des portions des autres courbes, AB, BF, BD, BE et la somme des appliquées AC, FC, DC, EC. Il faut trouver une tangente à un point donné de cette dernière courbe.(O.F.II,p.177)

Fermat ajoute:

> Si vous voulez que les quatre courbes de mon exemple soient un cercle, une parabole, une hyperbole et une ellipse, j'y consens, à la charge que vous croyiez que je donnerai la solution en tout nombre et en toute espèce de courbes données, et ce sans aucune asymmétrie, ce qui semble merveilleux.

Il s'agit de la courbe traitée par Beaugrand dans son essai sur la *méthode* de Fermat, que nous examinerons plus loin.

La deuxième courbe est définie par points de la façon suivante: on prend une parabole, on trace des perpendiculaires à l'axe; les points de la courbe sont sur ces perpendiculaires et sont tels que leurs distances de l'axe mesurées sur une perpendiculaire sont égales aux segments de parabole coupés par ces perpendiculaires. Les deux courbes précédentes sont définies dans la lettre à Mersenne du 22 octobre 1638 (voir O.F.II, pp.169-176). Dans la lettre suivante, datée du 26 décembre 1638, Fermat annonce à Mersenne la détermination de la tangente à une autre courbe "dont la proportion est pleine d'asymmétries" (O.F.II, p.176), définie par

$$y-\sqrt{b^2+x^2}+\sqrt{d^2-x^2}+\sqrt{rx-x^2}+\sqrt{\frac{x^3-bx^2}{d}}+\sqrt{\frac{x^4+d^2x^2}{b^2+x^2}}$$

3. Autres applications

Une application de la *méthode* qui, on peut dire, va de soi, est la détermination de la normale. Cette application a pourtant fait l'objet d'un exposé de Fermat, et précisément celui qui conclut la querelle avec Descartes sur la *méthode*: il s'agit de la ***Méthode expliquée***.

La détermination de la normale par la *méthode* est fondée sur deux éléments tirés d'Apollonius: la définition de normale comme segment minimum d'un point donné de la courbe au diamètre, et la définition de la tangente comme droite telle qu'aucune autre droite ne peut être tracée entre elle et la courbe. La démonstration donnée par Fermat après l'application de la *méthode* de maxima et minima est d'ailleurs directement inspirée par la démonstration de la proposition XXXI du Livre V des ***Coniques*** d'Apollonius.

On peut donc remarquer que par cet écrit Fermat ne démontra pas seulement que la méthode des tangentes dépend de la méthode de maxima et minima, mais aussi l'appartenance de sa *méthode* à la tradition d'Apollonius sur les problèmes des *diorismòi*. Par contre, cet aspect du cadre conceptuel classique ne semblait pas donner de souci à Descartes, qui considérait la détermination des tangentes comme notion primaire.

La détermination des points d'inflexion est une autre application de la *méthode* et Fermat la développe dans son écrit ***Doctrinam tangentium*** de 1640 (O.F.I, p.158 et suiv.): il s'agit cependant d'une construction plutôt que de la démonstration complète. Pour une explication moderne de ce travail, nous renvoyons aux remarques de Mahoney[7]. A gros traits, il s'agit d'une double application de la *méthode*, car d'abord il faut tracer la tangente, et ensuite minimiser l'angle qu'elle forme avec le diamètre. Avec la version de la *méthode* présentée à Brûlart, Fermat serait en mesure, en 1644, de remplacer cette double application de la *méthode* par une seule application. Mais il ne revient plus, par écrit, sur la questions des points d'inflexion.

On verra que, dans les lettres à propos de la *méthode*, Fermat affirme à plusieurs reprises pouvoir déterminer les asymptotes. Or, il s'agirait là de la première détermination d'asymptote en version algébrique, mais malheureusement Fermat s'est borné à l'annoncer, un peu dans le même style que Descartes, qui mentionne sans construction ni démonstration toutes les applications de la *méthode* (Voir ***Géométrie***, pp.341 et 351).

Par contre, une autre application de la *méthode* a été développée par Fermat dans deux traités et quelques lettres: la détermination de la loi de

---

[7]Voir Mahoney [82] pp.201-202.

réfraction. En effet, ce sujet intéressa Fermat au point qu'il trouva le loisir (pour employer ses mots) d'écrire non seulement l'analyse mais aussi la synthèse de cette démonstration.

Cette application de la *méthode* a fait l'objets de plusieurs études: outre Hofmann et Mahoney, un chapitre de l'ouvrage de Sabra et enfin le travail plus récent de Andersen[8], auquel nous renvoyons. Il suffit de dire que, malgré ses complications techniques, la déduction de la loi de réfraction ne contient qu'une application de la procédure de l'***Appendix***.

La seule autre application explicitée par Fermat est la détermination des centres de gravité des paraboloïdes de révolution, application qui mérite la deuxième partie du chapitre.

Deuxième partie: les centres de gravité

La détermination du centre de gravité des paraboloïdes de révolution (ou conoïdes paraboliques, selon la terminologie d'Archimède) est certainement, parmi les applications de la *méthode*, la plus inattendue pour les modernes. Quant aux mathématiciens du XVIIe siècle, il en était probablement de même, à en juger par la fierté avec laquelle Fermat annonça cet "usage" de la *méthode* dans sa lettre à Roberval du 22 septembre 1636 (O.F.II,p.72):

> ...vous n'avez pas vu ses plus beaux usages; car je la fais servir, en diversifiant un peu:
>
> (...) Pour l'invention des centres de gravité de toute sorte de figures, aux figures mêmes différentes des ordinaires, comme en mon conoïde et autres infinies, de quoi je vous ferai voir des exemples quand vous voudrez.

---

[8]Voir A. I. Sabra [120], M. Mahoney [82], K. Andersen [84].

D'après Tannery et Henry, Fermat fit en effet parvenir à Roberval, par Mersenne, la pièce ***Centrum gravitatis*** avec sa lettre du 20 avril 1638. Cette dernière est d'ailleurs dominée par les polémiques en cours avec Descartes, tant à propos de la ***Dioptrique*** que de la *méthode*, et aucune référence n'est faite aux centres de gravité[9]. C'est plutôt la pièce elle-même qui contient plus que d'habitude, des renseignements sur le point de vue de Fermat. Il écrit en effet au début de la pièce:

> On recherche le centre de gravité (du conoïde parabolique) par la méthode qui est toujours la même, et par laquelle nous trouvons les maxima et minima et les tangentes des lignes courbes, afin que par moyen de nouveaux exemples et d'une nouvelle et importante application il devienne clair que ceux qui pensent que la méthode trompe se trompent à leur tour. (O.F.I, pp.136-137)

Et vers la fin de la même pièce:

> Par une méthode non différente on trouve les centres de gravité des paraboles quelconques à l'infini et des conoïdes paraboliques. (O.F.I, p.139)

De plus, le 16 décembre 1636, Fermat écrivait à Roberval:

> Je lui (à Beaugrand) ai écrit l'invention du centre de gravité de toutes ces nouvelles figures par une méthode particulière qui ne suppose point la connaissance de la quadrature, ce qui vous semblera merveilleux jusqu'à ce que vous l'aurez vu. Il est vrai que je lui ai envoyé l'analyse simplement....(O.F.II, p.94)

et plus loin Fermat attribue à Archimède la possession d'une méthode qui détermine elle aussi le barycentre (de la parabole) indépendamment de la quadrature:

---

[9] L'enthousiasme de Fermat pour sa découverte, ainsi qu'une brève présentation, figurent dans le billet ajouté à la lettre à Mersenne du 1er juin 1638, voir O.F.II, pp.149-150.

J'ai trouvé le centre de gravité de la parabole sans supposer la quadrature, comme a fait Archimède, et ainsi on en peut tirer la quadrature par un simple corollaire. (O.F.II, p.94)

Ce que cet usage de la *méthode* implique est donc une connexion entre les maxima et minima et les quadratures, et pour cette raison, ainsi que pour connaître une application inattendue de la *méthode*, nous allons l'étudier de près.

1. Aperçu d'histoire des centres de gravité.

La détermination du centre de gravité du conoïde parabolique est un problème important pour les mathématiciens de la fin du XVIe, qu'avait engendré la diffusion des oeuvres d'Archimède. Dès le début, il s'agissait d'approfondir la question plus que de trouver la solution. En effet, Archimède, dans ***Des corps flottants***[10], avait cité un de ses résultats:

> Il a été démontré dans le traité ***Des équilibres*** que dans tout segment de paraboloïde de révolution le centre de gravité est situé sur l'axe au point qui le divise de manière que le segment de l'axe du côté du sommet soit double du segment restant. (II, prop.2, [4] III p.25)[11]

Cette référence frappa Commandino qui publia sa traduction d'Archimède en 1558, et la fit suivre par son traité ***De centro gravitatis solidorum***. Dans sa préface à ce dernier traité, Commandino définit son programme comme une reconstruction de la démonstration d'Archimède

[10] J'utiliserai ici l'édition [4] de Ch. Mugler, aux Editions Belles Lettres.

[11] En effet, le traité cité par Archimède était perdu à l'époque et n'a jamais été retrouvé. Par contre, le théorème est démontré dans le traité ***Ephodos***, publié de nouveau seulement en 1912, comme proposition 5. Voir [4] t. III, pp.99–102.

visant tant la proposition citée que d'autres problèmes de barycentre dont il souligne l'importance "non seulement pour les mathématiciens, mais pour ceux qui s'intéressent à l'obscurité de la nature"[12].

En ce qui concerne spécifiquement le problème du conoïde parabolique, Commandino fournit une nouvelle démonstration selon la méthode archimédienne d'exhaustion que l'on peut trouver aussi dans les écrits inédits de Maurolico. Bien entendu, toutes ces variantes constituent une tradition à leur tour et leurs différences mériteraient d'être étudiées.

Un autre savant italien parviendra à étendre ces résultats vingt ans après: c'est Galileo Galilei qui, en 1585, envoya à Clavius une copie de son ***Theoremata circa centrum gravitatis solidorum***. Il s'agit du premier écrit de Galilée[13] et il peut être comparé, du point de vue de ses notions statiques plus que des géométriques, avec les importants travaux de Simon Stevin qui, en 1586, proposa une solution qui voulait explicitement développer celle de Commandino[14]. Michel Coignet d'Anverse commenta cette solution et en fournit une variante et Clavius[15] fit de même. Mais celui qui développa ce projet jusqu'à décourager Galilée de le poursuivre fut Luca Valerio, selon le témoignage de Galilée lui-même[16]. Luca Valerio,

[12] "....non mathematicis solum, verum iis etiam, qui naturae obscuritate delectantur" F.Commandinus [15], troisième page de la préface.

[13] Comme M.Adriano Carugo me l'a indiqué, la datation traditionnelle (voir l'introduction de Favaro au texte de Galilée, vol.1, p.189 de [31] est correcte.

[14] Voir ***Hyponemnata mathematica*** [53] pp.75–76.

[15] Voir Galilei [31] vol.10, pp.27–32. Je n'ai pas pu trouver la démonstration de Clavius, qui appartient probablement aux Mss. de Guidobaldo del Monte.

[16] Vers la fin du quatrième dialogue de ***Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze***, Galilée écrit en effet: "Queste sono alcune proposizioni intorno al centro di gravità de i solidi, le quali in sua gioventù andò ritrovando il nostro Accademico, parendogli che quello che in tal materia haveva scritto Federigo Commandino non mancasse di qualche imperfezzione. Credette dunque con queste Proposizioni, che qui vedete scritte, poter supplire a quello che che si desiderava nel libro del Commandino; et applicossi a questa contemplazione ad instanza dell'Illustrissimo Sig. Marchese Guid'Ubaldo dal Monte grandissimo matematico de' suoi tempi, come le diverse sue opere publicate ne mostrano;

avec son ***De centro gravitatis solidorum*** de 1604, perfectionna la méthode archimédienne en enchaînant les lemmes qui constituent une démonstration par exhaustion de façon à rendre systématique l'usage de la démonstration par l'absurde. En outre, il détermina le centre de gravité de tous les conoïdes et sphéroïdes classiques ainsi que celui de leurs sections obtenues par des plans parallèles à la base.

2. L'approche de Fermat.

Tels furent les moments principaux de l'élaboration de ce problème[17] avant que Fermat ne l'aborde (probablement en même `temps que les autres questions reliées à la *méthode*, c'est-à-dire autour de 1628, à Bordeaux). Son approche est totalement dégagée de la méthode d'exhaustion. Fermat employa des théorèmes classiques d'Archimède, le langage et la structure argumentative de l'analyse de Viète ainsi que sa propre *méthode*.

Quant aux théorèmes classiques d'Archimède, il s'agit des suivants:

1) "Dans deux segments semblables compris entre une droite et une parabole, les centres de gravités divisent les diamètres dans le même rapport." ***De l'équilibre ou des centres de gravité des figures planes*** II,7 ([4] II, p.112).

e a quel Sig. ne dette copia, con pensiero di andar seguitando cotal materia anco ne gli altri solidi non tocchi dal Commandino. Ma incontratosi dopo alcun tempo nel libro del Sig. Luca Valerio, massimo geometra, e veduto come egli risolve tutta questa materia senza niente lasciar in dietro, non seguitò più avanti, ben che le aggressioni sue sian per strade molto diverse da quelle del Sig. Valerio."

[17] Au moins pour les traités d'allure plus géométrique. En réalité pour respecter les distinctions disciplinaires de l'époque, il faudrait rapppeler les traités sur le levier et les problèmes qui circulaient sur la balance et la chute des graves. Il ne faut pas oublier, d'ailleurs, que Fermat lui-même s'occupa de beaucoup de ces questions, bien que le témoignage de son travail sur le sujet consiste uniquement en lettres.

Plus précisément, Fermat se sert de l'extension de ce théorème aux solides tels que les conoïdes paraboliques, qu'il déclare banale, du reste, mais qui n'apparaît pas dans Archimède[18]. (On reviendra sur ce problème de l'extension.)

2) "Dans toute figure, dont le périmètre tourne en concavité du même côté, le centre de gravité doit être à l'intérieur de la figure". ***De l'équilibre....*** I, postulat 7, ([4] II, pp.80-81).

3) "Des grandeurs s'équilibrent à des distances inversement proportionnelles à leurs poids." ***De l'équilibre*** ... I,6 et 7 ([4] II, pp.110-112).

Il s'agit évidemment de la loi du levier.

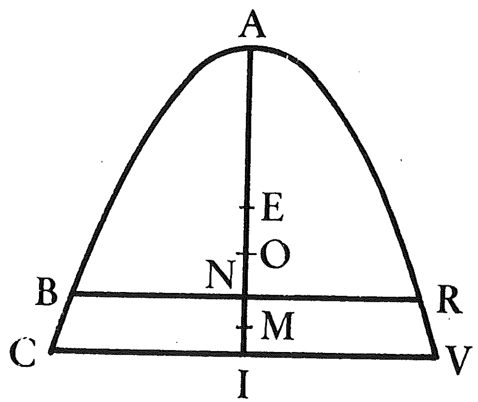
4) "Si l'on découpe d'un paraboloïde de révolution deux segments par des plans menés de quelque manière que ce soit, les segments ont entre eux le même rapport que les carrés sur leurs axes." ***Sur les conoïdes et les sphéroïdes***, 24 ([4] I, p.213).

La démonstration se déroule donc de la façon suivante:

Soit CBAV un conoïde parabolique, ayant pour axe IA, et pour base un cercle de diamètre CIV. Cherchons son centre de gravité. Afin de préparer l'analyse, appelons B l'axe IA, ...

Dans notre notation, IA = **b** , O est le centre de gravité, AO est la longueur inconnue **a**. Il faut couper l'axe par un plan quelconque BN, et posons IN = **e** , d'où NA = **b−e** .

[18] Fermat écrit en effet: "ce qui est démontré par Archimède pour la parabole, et s'étend par un raisonnement semblable à toutes les paraboles et conoïdes paraboliques, comme il est évident".



Nous avons donc un nouveau conoïde, BAR, avec NA comme axe et BN comme rayon de base. Le centre de gravité de ce nouveau conoïde divisera AN en un point E. Ici, Fermat fait appel au principe 1), en affirmant que son extension (aux paraboloïdes) est évidente. Cela lui permet d'écrire:

$$\frac{NA}{AE}=\frac{IA}{AO}\text{ , c'est-à-dire }\frac{b-e}{AE}=\frac{b}{a}\ .$$

En nos termes, cela signifie que, pour tout b, $\frac{a}{b}$ est une constante.

On pourra ainsi écrire $AE=\frac{ba-ae}{b}$ et, puisque $OE=AO-AE$,

$$OE=\frac{ae}{b}\ .$$

Si maintenant M est le centre de gravité du "frustum" CBRV, il doit tomber entre les points N et I, d'après le principe 2).

A cause du principe 3), ou loi du levier, il est vrai que

$$(\#)\qquad \frac{solide\ \ CBRV}{solide\ \ BAR}=\frac{EO}{OM}$$

puisque O est le centre de gravité de la figure totale CAV et que E et M sont ceux des parties.

Maintenant, si l'on applique le principe 4) aux conoïdes, on aura

$\frac{solide\ \ CAV}{solide\ \ BAR}=\frac{EA^2}{NA^2}=\frac{b^2}{b^2+e^2-2be}$ et, *dividendo* la proportion

$$\frac{solide\ \ CBRV}{solide\ \ BAR}=\frac{2be-e^2}{b^2+e^2-2be}$$

Et si l'on utilise (#), $\frac{2be-e^2}{b^2+e^2-2be}=\frac{OE}{OM}$, où $OE=\frac{ae}{b}$

d'où $OM=\frac{b^2ae+ae^2-2bae^2}{2b^2a-be^2}$

Puisque, comme on l'a déjà dit, le centre M est entre les points N et I, on aura OI > OM . Mais, en notes, OI = b–a. Alors, écrit Fermat, "la question est ramenée à notre méthode, c'est-à-dire que l'on peut poser l'*adaequatio* $b-a\approx\frac{b^2ae+ae^2-2ae}{2b^2a-be^2}$ "

Multipliant de part et d'autre par le dénominateur, divisant par e et négligeant les termes en **e** , on arrive au résultat d'Archimède: 3a = 2b , ou,

plus précisément, $\frac{IA}{AO} = \frac{3}{2}$ *et* $\frac{AO}{OI} = \frac{2}{1}$

Ce qui frappe ici est l'usage de la *méthode* qui, sans autre argumentation, ramène la question à une valeur extrême. Or, on ne voit pas tout de suite quel serait l'extrêmum. Pourtant, le contexte étudié jusqu'ici nous fournit une clé: l'idée de la comparaison de figures autour d'un point limite, qui dans ce cas est constitué par le centre de gravité.

Cette application nous offre l'occasion de redéfinir le procédé de la *méthode* qu'il faudra ensuite comparer aux autres formulations pour arriver à comprendre ce que Fermat pouvait entendre par sa *méthode*.

Procédé pour la détermination du centre de gravité du conoïde parabolique:

1) On exprime les grandeurs en *notes*,

2) On introduit une grandeur: "accroissement" de l'inconnue du problème,

3) On transforme les relations géométriques et les proportions jusqu'à ce qu'on arrive à une inégalité,

4) On traduit l'inégalité en notes et on écrit cette même inégalité comme une *adaequatio*.

5) On simplifie, on divise par **e** et on néglige les termes en **e**.

3. Justification et extensions de la détermination du barycentre.

Nous avons, je crois, les éléments pour conclure que Fermat fit ici un exercice de style: le résultat, on l'a vu, était connu, mais il s'agissait de reconstruire la démonstration, analyse et synthèse, pour saisir l'ensemble de la question, pour maîtriser l'heuristique et systématiser le traitement. On peut comparer ceci à la démonstration qu'Archimède avait donnée dans son ***Ephodos***, qui n'a été disponible que dans notre siècle[19]. En effet, Archimède démontra que:

> Dans le segment de paraboloïde découpé par un plan perpendiculaire à l'axe, le centre de gravité est situé sur l'axe du segment, en un point qui divise l'axe indiqué de manière que la partie du côté du sommet soit double de la partie restante." ([4] III, p.99)

Or, la démonstration ne dépend pas de la cubature du conoïde mais il y a un renvoi à ***La quadrature de la parabole***, ou plutôt à un théorème qui dépend de la quadrature de la parabole[20].

Est-ce que Fermat a réussi à échapper à la circularité, étant données ses déclarations que cette approche ne dépend pas de la quadrature mais que, au contraire, c'est la quadrature qui est un simple corollaire à la détermination du barycentre? Nous pouvons affirmer que la démonstration pour le conoïde présentée plus haut est indépendante de la cubature ou de la quadrature mais qu'elle ne s'applique qu'à une classe très limitée de courbes, soit à celles de la forme $y^q = ax^p$ et $x^p y^q = a$, et **p** et **q** étant des

[19] Bien qu'une longue tradition, à partir de la découverte de cet écrit d'Archimède en 1906 par Heiberg, ait établi la traduction du titre comme "Method", "Méthode" "Metodo" etc., je trouve que, dans le contexte d'une étude sur la Renaissance, il est nécessaire de souligner que l'application du terme aux mathématiques ne précéda pas le XVIe siècle. Ma référence à cet ouvrage d'Archimède sera donc toujours par le terme grec.

[20] Il s'agit de la proposition 4 de ***Ephodos***: "Tout segment de paraboloïde découpé par un plan perpendiculaire à l'axe est équivalent aux trois demis du cône ayant même base et même axe que le segment". On reviendra sur cette proposition.

entiers positifs. Le problème surgit avec les extensions annoncées par Fermat.

En effet, Fermat déclara dans le même texte que par le même procédé ("par une méthode non différente") on pouvait déterminer le barycentre des "paraboles quelconques à l'infini", c'est-à- dire non seulement de la parabole, mais des paraboles d'ordre supérieur qu'il avait lui-même introduites et, d'autre part, des conoïdes paraboliques. La vérité est que toutes ces extensions posent problème, et ce d'autant plus que Fermat ne développa rien d'autre que la démonstration présentée ici. En particulier, l'application à la parabole ordinaire donne lieu à certains problèmes que Roberval porta à l'attention de Fermat dans sa lettre du premier juin 1638. Cela provoqua une explication de la part de Fermat qui écrivit à Mersenne pour Roberval, le 15 juin 1638:

> Vous luy direz, s'il vous plaist, que ie suis de son advis en ce qu'il change mon raisonnement lorsqu'il applique ma méthode à l'invention du centre de la vraye parabole et autres à l'infiny. (...) ie feray voir que le centre de gravité d'une figure se peut treuver sans qu'on connaisse sa quadrature. Car, par exemple, en la parabole, ie ne me sers d'autre *medium* sinon que: [les suivants sont en latin, et j'en donnerai ma traduction]
>
> 1) Dans les sections coupées suivant l'appliquée les centres de gravité sont situés de façon semblable
>
> 2) Les sections de ce genre sont dans le même rapport que les triangles ayant la même base et la même hauteur, bien que nous ne connaissions pas lequel
>
> 3) Dans toute figure dont le périmètre tourne en concavité du même côté, le centre de gravité doit être à l'intérieur de la figure
>
> 4) Les parties de la figure sont inversement proportionnelles aux segments tirés des centres des parties au centre du tout. Tous lequels mediums se preuvent aisément par la voye d'Archimède, sans supposer la quadrature de la parabole. De sorte qu'ayant ainsi treuvé le centre de gravité de la parabole, nous en pouvons tirer par conséquence sa quadrature, qu'il faut adiouter aux deux d'Archimède et à celuy des quarrés des paraboles infinies, dont i'ay autrefois entretenu M. Roberval. (O.F. Suppl., p.86)

On reconnaît ici les fondements de la démonstration du conoïde, avec une variante pour le deuxième point. Or, il n'y pas, chez Archimède, un énoncé équivalent au deuxième fondement, bien que ce soit une conséquence de la proposition 24 de ***La quadrature de la parabole***[21] et que sa plausibilité dans le contexte archimédien ne laisse pas de doute que Fermat était en mesure de l'employer[22].

En ce qui concerne les paraboles supérieures et les paraboloïdes de révolution dérivées, nous n'en savons pas davantage. Car il est clair que, comme pour la détermination du barycentre de la parabole ordinaire, la démonstration du conoïde doit être beaucoup modifiée pour obtenir cette extension, et nous ne savons pas jusqu'à quel point Fermat connaissait les problèmes que cela pouvait soulever. Il y a pourtant un cas qui a sans doute été étudié en détail par Fermat: son nouveau conoïde défini comme la paraboloïde de révolution, non pas autour du diamètre, mais autour de l'ordonnée. Malheureusement, là aussi nous ne possédons que les résultats obtenus par Fermat, et non pas ses démonstrations[23].

4. L'approche de Torricelli.

Déjà, en 1643, Torricelli introduisait une nouvelle démonstration du théorème d'Archimède sur le centre de gravité de la parabole. Il y a en effet

---

[21] C'est-à-dire, "Tout segment compris entre une droite et une parabole est équivalent aux quatre tiers du triangle ayant même base et même axe que le segment".

[22] On peut remarquer que la proposition 23 de ***Sur les conoïdes et les sphéroïdes*** démontre le correspondant "solide" du même théorème.

[23] Voir O.F.II p.55, 73, 86.

une lettre à Roberval datée du premier octobre 1643 ([44] XII, p.328, traduite par Itard[24]) où Torricelli annonce un résultat semblable à celui de Fermat, soit une détermination du centre de gravité de la parabole "sans quadrature":

> Vous me demandez d'abord si je considère le centre de gravité de la parabole *a priori*, comme un problème résolu ou si, l'ignorant, je le cherche. Je rougirais, en vérité, de placer un théorème non démontré au milieu de mes autres petites propositions dont la démonstration est faite. J'ai exposé ce théorème à l'aide d'une démonstration unique et concise.

Selon Itard (p.261),la lettre de Torricelli est la suite d'un feuillet communiqué par Torricelli à Nicéron vers mai ou juin 1643 ([44] XII, pp.201-209) et de la lettre de Roberval à Mersenne datée probablement de juillet 1643 ([44] XII, pp.252-267). Dans ce feuillet, Torricelli avait annoncé qu'il pouvait aisément déterminer le centre de gravité de la parabole sans quadrature. Par contre, dans sa lettre à Mersenne, Roberval au courant du contenu du feuillet, loue Torricelli, mais remarque que cette solution avait déjà été trouvée en France, non seulement pour la parabole quadratique, mais aussi pour des paraboles supérieures ainsi que pour les volumes engendrés par leur rotation autour d'un axe. Il est probable que Roberval parlait ici des résultats de Fermat qu'il avait lui-même reconstruits. Itard est de cet avis, et s'appuie sur la lettre de Fermat à Roberval (déjà citée, du 16 décembre 1636, O.F. II, p.94) pour conclure à l'antériorité du résultat de Fermat ainsi qu'à l'indépendance du travail de Torricelli.

Mais ce qui nous intéresse particulièrement ici est la démonstration de Torricelli qui se trouve dans son ***Opera geometrica***, 1644[25].

D'abord, Torricelli fait référence à la proposition 7 du ***De l'équilibre des figures planes***, II, déjà citée. La construction qu'il propose est en effet

[24]Voir [74] dans [75] p.257.

[25]Comme Itard, je cite d'après les ***Opere di Evangelista Torricelli*** [54]. La démonstration se trouve aux pages 155-157 de la première partie.

celle de plusieurs paraboles par moyen de plans parallèles: le théorème dit donc que les centres de gravité de toutes ces sections se trouvent alignés, parce qu'ils coupent l'axe dans un rapport constant, et elles sont semblables. Or, il faut considérer "toutes les paraboles" obtenues de cette manière, et on aura que toutes les paraboles sont le cône lui-même. Mais la droite sur laquelle se trouvent les barycentres passe alors par le barycentre du cône. Cela lui suffit pour compléter sa démonstration. Torricelli parvient donc à la détermination du centre de gravité sans quadrature mais par un moyen qui peut aussi la déterminer directement, c'est-à-dire par la notion des *omnes lineae*, semblable mais non identique à celle que Cavalieri avait introduite dans sa ***Geometria indivisibilium*** de 1635.

5. Rôle de la détermination du barycentre.

On peut ainsi parvenir à la conclusion historique suivante: dans la même période, la tradition qui est issue du XVIe siècle de reconstruction de ce théorème d'Archimède donna lieu à deux épisodes particulièrement intéressants, parce que deux auteurs conçurent ce résultat comme indépendant de la quadrature. Il ne s'agit pas d'un problème démonstratif, qui serait relatif à la forme de la démonstration, mais plutôt d'une question de fondement théorique de la construction qui légitime une description nouvelle de l'objet géométrique. Itard a donc raison de rappeler que Cavalieri avait employé le verbe *adaequari* à propos de sa notion des *omnes lineae*[26].

Il remarque aussi que Cavalieri "n'avait pas eu la même audace" que Torricelli, puisqu'il n'avait pas marqué la différence des grandeurs (ayant écrit "Omnes autem parabolae atque ipse conus idem sunt."). Or, si ce passage de l'adéquation à l'identité est significatif, nous avons ici un intérêt

[26]Considero omnes lineas... me non numerum ipsum comparare... sed tantum magnitudinem, quae *adaequatur* spatio ab eisdem lineis occupato....(***Geometria***, II, prop.1, traduit au premier paragraphe du premier chapitre)

particulier à constater l'usage tout court du terme *adaequari*. Et ce qui nous intéresse est surtout son usage en rapport avec un nouveau fondement théorique de la construction géométrique du barycentre. Fermat semble suggérer, plutôt qu'une application mécanique de l'outil déjà expérimenté (sa *méthode*), que le fondement implicite de cette application est de reconnaître le barycentre comme un autre cas où la solution est un "point unique". Donc, on peut supposer que, ici comme ailleurs, un accroissement (d'un côté ou de l'autre, comme il l'expliquait dans la ***Lettre à Brûlart***) qui n'induit qu'une petite variation permet d'établir une *adaequatio*. Seulement après cela un traitement opportun (et algorithmique) de l'adéquation donnera le résultat cherché. Si l'on accepte notre hypothèse, selon laquelle le fondement conceptuel de la *méthode* de Fermat est la notion d'*adaequatio*, cette interprétation du barycentre comme "point critique" devient tout à fait raisonnable. D'autre part, elle ouvre une perspective très typique du XVIIe siècle sur le rapport entre ce que nous appelons différentiation et intégration. En effet, cette détermination du centre de gravité par la *méthode* conduit les modernes à se demander jusqu'à quel point Fermat était arrivé à imaginer quelque chose de semblable au théorème fondamental du calcul infinitésimal. Sur ce sujet, Itard, dans son mémoire de 1950[27], affirmait que

> L'intérêt de ce travail est double. (...) D'autre part, c'est un lien, non aperçu d'ailleurs par l'auteur et ses contemporains, entre les deux branches du calcul infinitésimal. Il eût suffit que Fermat appliquât sa méthode à la recherche, non des centres de gravité, mais des aires des paraboles ou des volumes des paraboloïdes pour anticiper tout au moins partiellement sur la découverte de Leibniz. ([73] p.13)

De son côté, Mahoney reprit la question d'un point de vue plus général, dans la conclusion de son examen des écrits de Fermat relatifs aux problèmes de quadrature. Mahoney écrit que, d'une part, le travail de Fermat sur les tangentes ne renvoie pas du tout à une notion de dérivée ou de tangente trigonométrique et que, pareillement, la méthode de maxima et

[27]Jean Itard [73].

minima ne signifie pas que Fermat égalait à zéro la dérivée: plutôt, il travaille sur les conditions d'existence d'une double racine.
D'autre part, la quadrature est, pour Fermat, la recherche d'un aire et non pas la détermination d'un nouvelle courbe; le problème inverse des tangentes n'est que cité par Fermat, qui n'ajoute aucun développement (***Méthode expliquée***, O.F.II, p.162). Mahoney conclut ainsi que Fermat ne put pas voir la relation inverse entre dérivée et intégrale. Cela marque, plus que toute autre chose, la distance entre le point de vue de Fermat et celui de Newton ou de Leibniz. C'est surtout à cause de cela, écrit Mahoney, que l'on ne peut pas considérer Fermat comme l'inventeur du calcul infinitésimal. Il conclut:

> Hence, one cannot say with any degree of fairness or objectivity that Fermat's work in analysis of curves was even heading in the direction of the calculus. For it was not pointed toward the concept that underlies the calculus and its fundamental theorem. For all suggestive and promising hints in his specific results, the manner in which Fermat understood and set up his problems precluded his arriving at the notion of the quadrature of a curve as a function of the abscissa, or of the tangent as such a function.

Je crois que, sur la base de notre étude de la *méthode* sans considération spécifique du traitement des quadratures, nous pouvons ajouter quelques remarques à ces conclusions de Mahoney.

D'abord, notre avis est que Fermat travaillait en effet sur les conditions d'existence d'une double racine, au sens que le but de Fermat était d'établir le rapport entre la comparaison de figures qui variaient autour d'un point limite et la comparaison entre équations correspondantes.

Dans ce sens nous confirmons la thèse de Mahoney d'après laquelle Fermat travaillait dans un contexte mathématique très différent de celui de Newton et Leibniz, et ce non seulement par rapport aux solutions trouvées (qui diffèrent beaucoup de Newton à Leibniz), mais au niveau des problèmes posés. Nous pensons, comme Mahoney, que, à ce sujet, Itard a été trop rapide dans le rapprochement. Nous voulons toutefois ajouter que l'évidence énoncée comporte un autre aspect: si nous choisissons pour caractériser le calcul infinitésimal la seule forme que lui ont donnée ces deux auteurs, nous ne pourrons voir en Fermat qu'un "précurseur", au plus. Et cela est déjà, bien entendu, une façon de forcer l'évidence du texte de Fermat en fonction de l'activité mathématique qui le suit. D'autre part, on peut aussi ne pas prendre comme terme de comparaison le calcul infinitésimal de Newton et Leibniz (et, par exemple, ne pas voir le théorème fondamental comme le *discrimen*), mais le voir comme aboutissement du travail mathématique sur les courbes et sur les problèmes de l'analyse classique. Dans ce sens, on peut affirmer que Fermat réussit à voir ces problèmes comme un ensemble de questions liées et cela dans une mesure très supérieure au point de vue courant à son époque. De plus, non seulement les questions sont liées chez lui, mais il possède aussi une *méthode* pour les traiter d'une façon algébrique et relativement uniforme. Les exemples les plus clairs sont l'explicitation du rapport entre maxima, minima et tangentes, qui comportent des solutions aux points d'inflexion et aux asymptotes, l'usage de la *méthode* pour les centres de gravité et finalement l'emploi de l'*adaequatio* pour les quadratures[28].

D'autre part, il faut remarquer que le rapport entre un auteur et ses successeurs est avant tout défini par ce que ces derniers lui reconnaissent, et par la tradition qu'il est en mesure de fonder. Dans ce sens, on peut dire, au regard de ce que nous allons explorer, que Fermat joua un rôle important dans la formation du calcul infinitésimal.

6. Appendice sur le barycentre: l'approche de van Schooten-Huygens.

J'ai défini plus haut la détermination du barycentre de Fermat comme un exercice de style, car ce qui distingue cette approche est uniquement le style et non pas le résultat (qui ne peut pas s'étendre) ni la justification.

[28]Voir à ce propos le chapitre V du livre de Mahoney [82].

D'ailleurs, comme on l'a rapidement illustré, il s'agissait d'un exercice relativement commun à l'époque.

Il serait donc naturel de se demander si quelque mathématicien fit usage et développa ce procédé, ou si Fermat resta sans héritier. En effet, nous avons au moins un texte qui semble témoigner d'une certaine diffusion de cet écrit, en dehors des discussions épistolaires entre Roberval, Fermat, Mersenne et Torricelli déjà citées: il s'agit de la détermination du centre de gravité du triangle dont Huygens s'occupe dans un manuscrit, suivant une méthode qui -écrit l'éditeur des "Oeuvres" de Huygens- lui avait été communiquée par van Schooten. Bien qu'une analyse complète de ce texte ne soit pas possible dans les limites de ce travail[29], ce que je veux indiquer brièvement ici est que cette méthode n'est autre chose que l'approche de Fermat relative à la détermination des centres de gravité. En outre, bien que la contribution originelle de Huygens soit ici difficile à démêler de celle de van Schooten, je formulerai trois hypothèses de travail qui nous serviront pour introduire au traitement par Huygens de la *méthode* de Fermat. Quelques anticipations non expliquées de l'approche de Huygens concernant les maxima et minima seront donc inévitables. La pièce ([37] XII, pp.87-89)[30] est datée du 25 novembre 1653 et est introduite par un titre significatif parce qu'il marque les limites de la *méthode*:

> Trouver les centres de gravité selon la méthode de Fr. Schooten, (méthode) qui concerne les (lieux) plans et solides de nature telle que le centre de gravité du segment découpé par une section parallèle à la base divise ce segment dans le même rapport que le centre de gravité de toute la figure partage le diamètre de toute la figure.[31]

[29]Je compte pourtant la développer ailleurs, comme contribution à l'établissement de la tradition Fermat-Schooten-Huygens, qui dans cette thèse n'est tracée que dans ses points principaux.

[30]Nos références serons toujours des oeuvres de Huygens [37].

[31]Le titre est en effet: "Centra gravitatis invenire secundum methodum Fr. Schotenij quae pertinet ad plana vel solida ejus naturae, ut in segmento abscisso sectione basi parallela, centrum grav. in eandem rationem dividat diametrum segmenti, atque in tota

Huygens obtient le résultat cherché en employant la loi du levier ainsi que le postulat 7, ***De l'équilibre....*** I (bien que le passage d'Archimède cité soit la prop. 8, ***De l'équilibre....*** II, à laquelle on a fait référence plus haut et qui concerne la parabole) suivant l'approche de Fermat en ce qu'il introduit la section parallèle à la base. La notation est typique de Huygens pour la méthode des maxima et minima qu'on expliquera plus loin, c'est-à-dire, avec **x** pour **A** et **y** pour **E**. Ce qui est remarquable est l'explication, la *ratio methodi*: Huygens donne en effet la double possibilité de l'accroissement, c'est-à-dire, **+y** ou **-y** , comme il le fera pour sa justification de la méthode de maxima et minima. Huygens conclut par une démonstration proprement dite, c'est-à-dire par une "exhaustion" à la manière d'Archimède, bien qu'algébrisée, *en notes*.

Nous pouvons donc suggérer quelques remarques: que Huygens, avec cette pièce, nous donne un autre exemple d' "exercice de style" car, si l'on connaissait le barycentre de la parabole, à fortiori on connaissait celui du triangle. En outre, pour être plus spécifique en matière de style, on peut faire l'hypothèse que la version algébrisée de l'exhaustion est précisément ce à quoi Huygens s'exerçait à cette époque, et que c'est là la contribution originale de Huygens à la méthode transmise par van Schooten. Finalement, on peut conjecturer aussi, grâce à la coincidence de dates avec les autres pièces de Huygens sur les maxima et minima, que Huygens voyait les extrêma en termes de la loi du levier et la *méthode* de Fermat ou son *adaequatio* comme une façon de "balancer" les équations. Ainsi, il insista toujours sur la nécessité de voir l'accroissement des deux côtés du point de l'extrêmum. Ce qui justifie, entre autres, sa réputation d'Archimède du XVIIe siècle, le plus fidèle représentant et en même temps le modernisateur des méthodes archimédiennes.

magnitudine diametrum totam."

CHAPITRE III

LA METHODE DE FERMAT POUR FERMAT ET SES CONTEMPORAINS

Première partie: la question de la méthode

1. Introduction: qu'est-ce que Fermat entendait par "ma méthode"?

Fermat inaugura sa correspondance avec Mersenne[1] en déclarant avec fierté posséder une *méthode*: il affirmait pouvoir résoudre par celle-ci plusieurs problèmes classiques et modernes et même aborder la généralisation de ces problèmes.

Mais quelle était sa *méthode*? Ni ses contemporains, ni les historiens n'ont pu donner une réponse univoque à cette question, faute de document définitif. A plusieurs reprises, Fermat assura vouloir rédiger un exposé unitaire sur la *méthode* et les résultats qu'il avait obtenus. Dans cet exposé plus complet, il avait l'intention de présenter sa *méthode* de façon claire, d'en donner une justification (sinon une démonstration proprement dite) et d'en illustrer la généralité d'application tant à des problèmes classiques qu'à des problèmes nouveaux. Malheureusement, cet essai n'a jamais été écrit et, par conséquent, la *méthode* ne trouva pas de formulation définitive, rigoureusement présentée, et valide pour tous les cas. Aux malentendus et aux critiques des contemporains succédèrent les conjectures des historiens sur ce que le "fondement" de la *méthode* pouvait bien être, fondement étant entendu à la fois comme origine et comme justification logique. Nous voulons ici plutôt déterminer autant que possible le "champ de vision" de Fermat et de ses contemporains pour établir ce que la *méthode* représentait à leurs yeux.

[1]Cette lettre date du 26 avril 1636. (Voir O.F .p.3)

2. Méthode

Le mot *methodus* vient du latin humaniste et non pas du latin classique. Le XVIe siècle fut le siècle de la méthode, au sens que les humanistes associaient à ce terme: celui d'un projet de renaissance théorique et pédagogique. Si, d'un côté, l'on a observé que *methodus* était lié au nom de La Ramée de la même façon que "relativité" est lié au nom de Einstein[2], par ailleurs, les nombreuses études sur le sujet, celle de Jardine[3], en particulier, ont montré que les débats sur la méthode peuvent être ramenés à trois questions principales.

1) Le débat sur l'identification ou la distinction entre la logique des humanistes comme Lorenzo Valla, fondée sur les ***Topiques*** et sur la tradition cicéronienne, et logique syllogistique. Pour les deux côtés, parfois cela impliquait une ouverte critique à Aristote, parfois seulement une réinterprétation des textes aristotéliciens, voire la prétension de la redécouverte du vrai Aristote.

2) Le débat sur la méthode de Galien qui devait servir de modèle de rigueur, avec ses références à l'analyse et à la synthèse, qui semblait valoir aussi bien pour les mathématiques que pour les sciences naturelles.

3) Le débat sur la comparaison entre la logique aristotélicienne et les démonstrations euclidiennes qui avait repris une certaine vigueur à la suite des éditions des traités des classiques en général et de celui de Proclus en particulier.

[2]Voir par exemple Mahoney,[112].

[3]Lisa Jardine, chap.1 in [109]. L'auteur offre aussi une synthèse des nombreuses études sur le sujet, dont, en particulier, les oeuvres magistrales de Vasoli, [125] et Gilbert, [102]. Parmi les ouvrages plus récents, nous rappelerons P. Desan [98].

Tous ces thèmes se rapportaient au problème de la définition du rôle des mathématiques dans l'ensemble des sciences, et de la détermination de leur forme propre; questions qui faisaient partie du programme des réformateurs humanistes. A cet égard, qu'il suffise de rappeler que La Ramée et Dasypodius[4], étaient eux-mêmes engagés dans un programme de réforme des études qui privilégiait les mathématiques et incluait des éléments d'algèbre. Pour La Ramée, qui n'était pas un mathématicien, mais un philosophe (au moins selon notre partition disciplinaire), le terme méthode a une signification philosophique qui s'articule en plusieurs directions, notamment en invention et jugement, la partition de la méthode selon les ***Topica*** de Cicéron. Quant au jugement, il se traduit dans le domaine mathématique comme voie pedagogique. L'algèbre doit simplifier le système de présentation et ainsi tout le processus de compréhension des mathématiques classiques que la méthode synthétique, c'est à dire les démonstrations euclidiennes, avait rendu obscures. De plus, puisque les mathématiques avaient une valeur éminemment pratique et étaient orientées, selon La Ramée, vers la résolution des problèmes, l'algèbre présentait l'avantage de fournir une approche heuristique, un *modus inveniendi*, qui était peut-être le même que celui des anciens et que la rigueur euclidienne avait effacé. L'algèbre modifiait donc les deux sens de la *methodus*, et constituait une voie privilégiée dans les sciences mathématiques en particulier, mais aussi dans les sciences pratiques [42].

Chez Dasypodius, le thème de la *methodus* est développé d'une part par le critère pédagogique de la *via et ordo* (traduction habituelle de *méthodos*) et par la notion de *mathesis universalis*. En cela il suit Proclus dans son commentaire à Euclide[5]. Viète, qui fut l'inspirateur du programme mathématique de Fermat, appartenait à cette tradition humaniste tant par son point de vue en général que par la connaissance qu'il avait de La Ramée et

[4]Konrad Rauchfuss (1532–1600), élève de Johann Sturm, comme Ramus, et par conséquent engagé dans la réforme religieuse ainsi que pédagogique. Professeur et auteur de manuels de mathématiques au Gymnase de Strasbourg.

[5]voir Crapulli, [95].

de son programme de réforme intellectuelle[6]. Viète aussi incluait dans son projet l'introduction d'une méthode, c'est-à-dire d'une approche simple, unitaire et formelle aux problèmes géométriques. C'est ce qu'il appelait la "voie royale", c'est-à-dire l'algèbre qui, dans ses écrits, devint la théorie des équations. En effet, dans son ouvrage ***In Artem analyticen Isagoge***, il définit l'*ars analytice* comme "Doctrina bene inveniendi in Mathematicis". Dans des études récentes[7], il a été établi que la "géométrie analytique" de Descartes et celle de Fermat constituaient deux développements d'une même algèbre symbolique, qui avait trouvé sa plus complète expression dans l'oeuvre de Viète. Il y aurait donc un processus logique reliant l'idée de méthode et la philosophie des mathématiques de La Ramée à la méthode de Descartes. Mais il faut penser que Fermat aussi, en tant que continuateur de Viète, était conscient du sens humaniste mathématique que prenait le terme de méthode, surtout en rapport directe avec l'algèbre symbolique et son usage étendu d'après Viète. Bien sûr, notre intention n'est pas d'ériger une telle conscience, s'il en fut, en épistémologie ou en "méthodologie" qui autorise, par exemple, à comparer la théorie de la méthode chez Descartes à la théorie de la méthode chez Fermat: en fait, comme on le verra plus loin, cela n'est pas autorisé par les textes. Nous voulons plutôt mettre en relief les différents éléments qui interviennent dans le glissement de sens qui se produit lorsqu'un humaniste tardif comme Fermat introduit l'usage d'un terme philosophique en mathématiques.

Ces mathématiques en transformation étaient issues d'un réseau de questions et trouvaient leurs fondements dans l'ontologie des classiques grecs et dans la tradition de la géométrie, alors que leurs techniques venaient plutôt de la tradition de l'algèbre. Cela veut dire, en particulier, que si Viète avait une épistémologie consciente qu'il explicitait dans son programme, Fermat de son côté adoptait une épistémologie tout en restant dans la même tradition, se bornant à travailler, dans le concret, à l'application de l'algèbre de Viète aux problèmes ou au plus à l'extension de

[6]voir Mahoney, [112], où il illustre la descendance ramiste en mathématiques.

[7]Voir Mahoney et Grosholz en Gaukroger (éd.), [101].

techniques qui, dans ses mains, devinrent des techniques générales ou de véritables méthodes.

Celui qui veut considérer attentivement l'usage du terme "méthode" chez Fermat rencontre des obstacles à différents niveaux, le premier étant que dans les textes de Fermat le mot "méthode" semble avoir des connotations différentes. Les quatre conjectures suivantes s'imposent comme possibles:

1) La *méthode* de Fermat est une approche algébrique systématique, un algorithme ou un presque-algorithme. Dans ce cas, il s'agit surtout d'une procédure pour la résolution des problèmes de maxima et de minima, qui, au dire de Fermat lui-même, donna la procédure pour la détermination des tangentes et des points d'inflexion, et est applicable au problème des centres de gravité des paraboloïdes et à la loi de réfraction. Mais, étant donné que dans les textes de Fermat nous n'avons que des solutions spécifiques à des problèmes particuliers, cette interpretation soulève une question théorique (a) et une question historique (b). La question théorique consiste à construire une formulation suffisamment générale de la *méthode*, c'est-à-dire à fournir un exposé définitif de la *méthode* que Fermat lui-même n'eut jamais le "loisir" de donner. La question historique est de tracer l'évolution de la *méthode* à partir des écrits, dans ses applications à des cas particuliers.

2) La *méthode* de Fermat est, plus généralement, une approche algébrique des problèmes geométriques qui fait usage de la théorie des équations de Viète. C'est clair dans le cas des maxima et minima où cet usage est spécifié explicitement ou mis en évidence par le contexte. La difficulté ici est que cette conjecture semble tout réduire à une signification du mot *méthode* qui est présente dans quelques passages des oeuvres de Fermat (comme l'on verra dans les textes relatifs).

3) La *méthode* de Fermat est un "truc" particulier de la théorie des équations de Viète, élaborée à nouveau par Fermat. Le "truc" se révéla applicable à plusieurs situations mais il consistait essentiellement en de simples manipulations de termes dans des équations indéterminées, et une façon uniforme d'approcher le problème à résoudre.

4) La *méthode* de Fermat est la procédure de maximum et minimum, avec *adéquation*. Fermat conçut cette procédure comme solution des problèmes qui comportaient des *diorismòi,* c'est-à-dire, en gros, le domaine qui sera couvert par le calcul différentiel leibnizien, à son origine. Les précédentes discussions sur l'*adéquation* et les *diorismòi* devraient fournir une partie des arguments en soutien de la quatrième hypothèse. Mais pour se former une idée plus claire de la question et des options qui restent au lecteur moderne, il faut se concentrer sur les textes.

3. Les textes

Dans sa première lettre à Mersenne, datée du 26 avril 1636 (O.F. II, p.3), Fermat écrivait:

> J'ai trouvé aussi beaucoup de sortes d'analyses pour divers problèmes tant numériques que géométriques, à la solution desquels l'analyse de Viète n'eût su suffire. De tout cela, je vous en ferai part quand vous voudrez (...). Je voudrais pourtant qu'il vous plût, sans me nommer, proposer aux plus habiles de delà les deux questions suivantes à soudre, pour ce que leur solution dépend d'une méthode particulière que j'ai trouvée, de laquelle je ne ferai plus tant d'état, si vous trouvez quelqu'un qui les puisse soudre géométriquement. Prima- Datae spherae inscribere conum rectum omnium inscribendorum ambitu maximum. Secunda- idem proponit de cylindro quod superior de cono.

Ici le mot "méthode" paraît associé aux deux problèmes de maximum mais aussi au développement de l'analyse de Viète opéré par Fermat pour résoudre des problèmes numériques et géométriques.

Dans sa lettre à Etienne Pascal et Roberval, écrite au mois d'août de la même année, il mentionne la proposition sur le centre de gravité du conoïde, et ajoute:

> J'ai trouvé beaucoup d'autres propositions géométriques, comme la restitution de toutes les propositions *de locis planis* et d'autres; mais ce que j'estime plus que tout le reste est une méthode pour déterminer toute sorte de problèmes plans ou solides, par le moyen de laquelle je trouve l'invention *maximae et minimae in omnibus omnino problematibus*, et ce, par une équation aussi simple et aisée que celle de l'analyse ordinaire. Il y a infinies questions que je n'aurais jamais pu résoudre sans cela, comme les deux suivantes, que vous pouvez essayer si vous voulez... <et ici Fermat propose de nouveau les problèmes de maximum de la lettre à Mersenne et ajoute:> Il semble que ces deux questions sont nécessaires pour une plus grande connaissance des figures isopérimètres. Cette méthode ne sert pas seulement à ces questions, mais à beaucoup d'autres et pour les nombres et pour les quantités. (O.F. II, p.56)

Le passage précédent est le premier dans lequel il est fait référence à une méthode qui s'applique à divers problèmes plans et solides (c'est-à-dire à des problèmes dont la solution peut être construite géométriquement par des droites, des cercles et des sections coniques) et aux problèmes de maxima et minima, abordés au moyen d'équations. En outre, Fermat mentionne explicitement que cette méthode s'applique aux problèmes des figures isopérimétriques et à beaucoup d'autres questions concernant les nombres et les quantités. Ce qu'il importe de noter ici, c'est l'amplitude du domaine d'application de la méthode et le fait que la méthode des maxima et minima (appliquée aux problèmes isopérimétriques) ne soit vue que comme un cas particulier d'une autre. Mais la lettre qui implique la signification la plus ample sur la *méthode*, qui pourtant est appelée méthode *de maximis et minimis* est celle qu'il écrivit à Roberval le 22 septembre 1636, et que je citerai presque en entier.

Sur le sujet de la méthode *de maximis et minimis*, (...) vous avez vu la mienne que je lui (à Despagnet) baillai, il y a environ sept ans, étant à Bordeaux; (...) Si M. Despagnet ne vous a proposé ma méthode que comme je la lui baillai pour lors, vous n'avez pas vu ses plus beaux usages; car je la fais servir, en diversifiant un peu:

1) pour l'invention des propositions pareilles à celles du conoïde que je vous envoyai par ma dernière

2) pour l'invention des tangentes des lignes courbes, (...)

3) pour l'invention des centres de gravité de toute sorte de figures, aux figures même différentes des ordinaires, comme en mon conoïde et autres infinies (...)

4) aux problèmes numériques auquels il est question de parties aliquotes (...)

C'est par ce moyen que je trouvai 672 duquel les parties sont doubles aussi bien que celles de 120 sont de 120. C'est aussi par là que j'ai trouvé des nombres infinis qui font la même chose que 220 et 284, c'est-à-dire que les parties du premier égalent le second et celles du second le premier. De quoi si vous voulez voir un exemple pour tâter la question, ces deux y satisfont: 17296 et 18416.

Voilà quatre sortes de propositions que ma méthode embrasse et que peut-être vous n'avez pas sues. Sur le sujet du 1), j'ai quarré infinies figures comprises de lignes courbes; comme, par exemple, si vous imaginez une figure comme la parabole, en telle sorte que les cubes des appliquées soient en proportion des lignes qu'elles coupent du diamètre. Cette figure approchera de la parabole et ne diffère qu'en ce qu'au lieu qu'en la parabole on prend la proportion des quarrés, je prends en celle-ci celle des cubes; et c'est pour cela que M. de Beaugrand, à qui j'en fis la proposition l'appelle *parabole solide*. (...)

Puisque vous avez trouvé ma proposition du conoïde excellente, la voici plus générale (...)

J'avois omis le principal usage de ma méthode qui est pour l'invention des lieux plans et solides; elle m'a servi particulièrement à trouver ce

lieu plan que j'avois auparavant trouvé si difficile: "si a quotcumque datis punctis ad punctum unum inflectantur rectae et sint species <c'est-à-dire les carrés> quae ab omnibus fiunt dato spatio aequales, punctum continget positione datam circumferentiam." Tout ce que je viens de vous dire ne sont qu'exemples, car je vous puis assurer que, sur chacun des points précédents j'ai trouvé un très grand nombre de très belles propositions. Je vous envoierai la démonstration de celles que vous voudrez: permettez-moi néanmoins de vous prier de les essayer plutôt et de m'en donner votre jugement. (O.F. II, p.71)

Je pense qu'on ne saurait être plus explicite dans la mise en rapport de sujets et questions si diverses. Ce qui en ressort le plus immédiatement, c'est que Fermat possédait une procédure unifiée, applicable à des problèmes aussi différents que les propriétés de certains nombres et les tangentes ainsi qu'à "son principal usage", c'est-à-dire à la solution de problèmes de lieux, comme le problème d'Apollonius expliqué dans ***De locis planis***[8] II,5. L'idée d'une méthode unique est aussi exprimée dans une autre lettre de Fermat à Roberval, datée du 16 décembre de la même année. Dans cette lettre, après avoir fait allusion à ses solutions aux problèmes des parties aliquotes ("J'ai trouvé une méthode générale pour soudre toutes les questions par algèbre"), à un problème de Diophante et à d'autres problèmes de quadrature, Fermat écrivait:

Je lui ai écrit l'invention du centre de gravité de toutes ces nouvelles figures par une méthode particulière, qui ne suppose point la connoissance de la quadrature, ce qui vous semblera merveilleux jusques à ce que vous l'aurez vu. Il est vrai que je lui ai envoyé l'analyse seulement et non pas la composition que je vous éclaircirai une autre fois, parce qu'elle a ses difficultés et ne paroit pas d'abord par cette voie. J'ai trouvé le centre de gravité de la parabole sans présupposer la

---

[8]C'est mon abréviation pour le titre de l'ouvrage de Fermat ***Apollonii Pergaei libri duo de locis planis restituti***. Il appartient au groupe des premiers écrits de Fermat, donc composés entre 1629 et 1636, quand ils furent envoyés à Mersenne. D'après la correspondance nous apprenons que la proposition 5 du livre II fut l'obstacle principal dans la rédaction de cet ouvrage. Voir [82] pp.101-113.

> quadrature, comme a fait Archimède, et ainsi on en peut tirer la quadrature par un simple corollaire. Toutes ces propositions, ensemble celles des lieux plans solides et ad superficiem, que j'ai achevées, et celles encore des parties aliquotes des nombres, dépendent de la méthode dont M. Despagnet ne vous a pu faire voir qu'un seul cas, parce que, depuis que je n'ai eu l'honneur de le voir, je l'ai beaucoup étendue et changée.
> Les tangentes des lignes courbes dépendent aussi de là, sur lequel sujet je vous proposerai de trouver une tangente à un point donné en la seconde conchoïde de Nicomède. (O.F. II, p.94)

Cette lettre est la dernière écrite en 1636. Après quelques échanges avec Roberval, la correspondance sera ensuite dominée par Descartes et portera sur la loi de réfraction et sur la *méthode*. Dans ce cas, la discussion est centrée sur les procédures des maxima et minima et des tangentes, ou plutôt sur la détermination des tangentes aux courbes algébriques (en nos termes, ou géométriques dans la terminologie de Descartes) où la tangente est considérée comme un cas d'extrêmum. On ne trouve pas de référence à la *méthode* qui ne soit explicable en termes de cette querelle jusqu'à la lettre à Mersenne, datée 26 décembre 1638, soit deux années plus tard.

> ...pour les nombres, je peux trouver par ma méthode toutes les questions des parties aliquotes... Pour la géométrie, comme toutes les courbes et les tangentes qui sont de la juridiction de la méthode de M. Descartes le sont aussi de la mienne, et particulièrement lorsque la comparaison des portions du diamètre aux appliquées est mêlée de lignes courbes, je m'en démêle aussi aisément que des simples tangentes. De quoi vous ne m'avez pas répondu. Obligez-moi donc de savoir si les messieurs de Paris en peuvent donner la solution, et je vous envoierai tout aussitôt la mienne. Bien plus, je donnerai infinies tangentes de courbes dont la proportion est pleine d'asymmétries. (...) Ma méthode les donnera, et infinies de pareille nature, etc., quand bien la ligne DF seroit composée de centinomies ou plus grand nombre de termes. (O.F. II, pp. 176-178)

Cependant, cette lettre se borne à donner une liste des découvertes de Fermat, et ne contient aucun énoncé spécifique sur la possibilité qu'elles

aient un traitement commun. Cela pourrait être vu comme un argument contre l'interprétation unitaire, mais aussi comme l'expression d'une phase postérieure de la pensée de Fermat. Alors les différentes questions se seraient ramifiées en différents domaines et il n'était plus question de souligner ce qui unifiait leur traitement.

4. Premières conclusions sur le statut de la méthode de Fermat

A la fin du premier paragraphe j'avais mis en évidence les différentes possibilités d'interprétation pour qui veut "prendre au sérieux" les affirmations de Fermat selon lesquelles plusieurs de ses résultats ne seraient que des applications de sa méthode de maxima et minima. On peut maintenant les reprendre pour se rendre compte de ce qui sera l'objet d'une enquête ultérieure.

à propos de 1) La *méthode* de Fermat pourrait être vue comme un algorithme pour maxima et minima et tangentes. Le problème théorique (question a)) de trouver une formulation qui donne une vraie méthode des maxima et minima, suffisamment générale pour produire automatiquement toutes les applications sans compter sur l'habileté de l'analyste, reste pourtant ouvert. Comme nous l'avons vu, les historiens ont, pendant longtemps (jusqu'à Wieleitner, ou à la découverte de la ***Lettre à Brûlart*** et bien sûr de l'***Analytica***) adopté ce point de vue. Cette interprétation a été critiquée plus récemment par Stromholm, car elle ne tient pas compte des différences entre les nombreuses versions. Ce point de vue est par ailleurs trop restreint, au sens qu'il ne prend pas en considération l'insistance avec laquelle Fermat mit ces problèmes en rapport avec d'autres qu'il avait résolus.

Quant au problème historique de la genèse du procédé (question b), elle a été étudiée depuis longtemps et, plus récemment, Stromholm et Mahoney, de façons différentes et complémentaires, ont étudié la question à fond. Ils ont donc définitivement établi qu'une interprétation rigide de la *méthode* en terme d'algorithme uniforme n'est plus acceptable après les découvertes philologiques. Stromholm l'a démontré en soulignant l'opposition entre les différentes méthodes, Mahoney en les étudiant génétiquement.

à propos de 2) La *méthode* serait un traitement algébrique de problèmes géométriques, par la théorie des équations de Viète. Cette interprétation est un peu trop générale, à mon sens (que l'on pense, par exemple, à la lettre du 16 décembre 1636), mais elle est la plus prudente. La lecture des textes qui est proposée ici suggère quelque chose de plus précis: d'abord, Fermat manifesta son enthousiasme pour avoir trouvé une solution pour le difficile problème 5 du livre II de sa reconstruction du ***De locis planis*** d'Apollonius. En même temps, il était en mesure d'appliquer sa connaissance de la *syncrisis* et de l'*anastrophe* de Viète pour réinterpréter le problème de minimum d'Apollonius (dans la ***Section Déterminée***, citée par Pappus comme le Lemme 21 de la Prop. 61: voir O.F. p. 142). Par là, les "cas limites" (*diorismòi*) réductibles aux extrêma pouvaient se résoudre de façon unifiée, et par là encore la détermination des tangentes des courbes et des centres de gravité de quelques solides devenait possible[9].

Qu'est-ce qu'il y a de commun à tous ces problèmes, ou plutôt quel lien y a-t-il entre la solution pour ***De locis planis*** et celle pour la ***Section Déterminée***? Une analyse de ceci demanderait un chapitre, mais on peut dire brièvement qu'il s'agit essentiellement de la façon d'aborder les problèmes géométriques de manière algébrique ou, selon l'expression de l'époque, analytique. On pose les termes connus et inconnus sous forme d'équation et l'on étudie les possibilités de solution selon la théorie des équations, en obtenant une équation qui donne "en principe" la valeur recherchée et l'on détermine ensuite la valeur géométrique de cette dernière par le moyen d'une interprétation générale déjà établie. Je peut ajouter aussi que, si le rapport entre la solution de Fermat et les maxima et minima n'est pas mis en

[9]Voir à propos de cet important problème, traité plusieurs fois par Fermat et constituant pour lui un modèle. Hofmann [76] et Mahoney [82], p. 150.

évidence, ce rapport existe et est direct, ne serait que de la manière éclaircie par Christiaan Huygens en 1650[10].

Cette caractérisation peut s'appliquer à la solution des problèmes de parties aliquotes. Fermat ne donne aucune indication du sens auquel son procédé pour les nombres est comparable avec une des procédures de la *méthode*. Cependant, il mentionne dans une lettre (O.F. II, p.164) que sa méthode est analytique, c'est-à-dire fondée sur un procédé algébrique uniforme ou du moins tel que l'on peut en écrire la règle sous forme d'équation. En outre, il travaille, comme dans les procédures de la *méthode*, sur l'introduction d'une deuxième inconnue. Nous renvoyons, pour un rapprochement précis avec la *méthode*, aux remarques de Goldstein sur les méthodes algebriques de Fermat pour les problèmes de théorie des nombres[11].

à propos de 3) La *méthode* serait un "truc" particulier de la théorie des équations. Selon l'hypothèse de Mahoney[12], il s'agirait alors d'une façon de traiter les équations indéterminées où l'on annulle le coefficient de l'inconnue et substitue le résultat de cette dernière équation dans celle du départ. On rencontre ce genre de manipulation dans les ***Porismes*** et l'on peut penser que tel est le raisonnement sous-jacent à la méthode des maxima et minima qui est présentée dans la lettre à Brûlart. Cependant, on rencontre des difficultés en essayant d'unifier le traitement du problème des ***De locis planis*** et de ***Analysis ad refractiones***.

Pour le moment, on doit donc conclure que cette conjecture est intéressante mais on ne peut pas s'en servir comme base d'analyse.

Je crois que le lecteur moderne de Fermat a le choix entre deux possibilités: une version restreinte et précisée de la conjecture 2), ou la conjecture 4).

[10] Voir Huygens, [37] 11, pp.229-234.

[11] Voir C. Goldstein [106]

[12] Il l'élabora dans une conversation, en 1982, mais elle est mentionnée en note, comme schème de conjecture, dans sa thèse, [112].

La conjecture 2) doit être restreinte et déterminée parce qu'il est nécessaire de rappeler exactement quels sont les problèmes qui ont été à l'origine de la *méthode* et parce qu'il faut préciser si Fermat en a vraiment compris la généralité. Il semble que Fermat ait vu des relations que nous ne voyons plus, d'abord parce que les bornes de notre champ de vision ont changé dans tous les sens, et peut-être aussi à cause d'une intuition que Fermat avait et qui nous semble, ou est, fautive. Mais ce qui importe ici est qu'il pensait avoir une méthode quand il a commencé à réaliser le programme de Viète sur les équations indéterminées. Il s'agit déjà d'une méthode si l'on se reporte à ce que Boyer écrivit de Viète: "s'il avait étudié les propriétés géométriques de l'indéterminé, il aurait découvert la géométrie analytique"[13].

En outre, la spécificité même de la découverte de la géométrie analytique exigeait qu'on l'appelât méthode puisqu'elle consistait en l'étude de questions de résolution plutôt qu'en l'élaboration des solutions mêmes (comme le sont d'ailleurs les questions d'Apollonius qui lui servirent de base). Il ne s'agissait pas seulement de méthodes au sens algébrique (comme les *Invenzioni* de Tartaglia) mais d'un système de correspondance sur les conditions de résolution en algèbre et en géométrie.

Chez La Ramée, "méthode" signifiait, avant tout, manière correcte d'apprendre et d'enseigner et l'approche raisonnée à la recherche (*modus inveniendi*). La caractéristique principale de cette "méthode" était d'être communicable. Avec Fermat, le terme acquit une signification strictement mathématique et ainsi reprit partiellement le sens de procédé pour résoudre des problèmes scientifiques. Fidèle à la tradition algébrique, cette "méthode" a un certain caractère secret.

A mon avis, si le sens du terme est restreint à celui de programme et d'approche systématique, on retrouve ici ce qui est appelé une géométrie analytique. Ensuite, la signification se spécifia surtout au cours de la controverse avec Descartes, et, l'activité de Fermat devenant plus diversifiée, il n'insista plus sur l'aspect unitaire pour se concentrer sur un aspect nouveau, soit (non pas la géométrie analytique qui est déjà répandue

[13]Boyer, [90].

dans la version de la ***Géométrie***), mais les procédures des extrêma et tangentes.

à propos de 4) La version donnée par Fermat lui-même dans sa lettre à Brûlart est peut-être ce qui se rapproche le plus de l'explication d'un algorithme à la fois fondé logiquement et suffisamment généralisable. Suivant cette approche (sur laquelle repose le procédé de développement en axe, division par **e** et élimination des termes en **e** [14]), on peut en effet obtenir une série de résultats qui, en termes modernes, se résument comme suit:

i) détermination du maximum et du minimum (absolu) des polynômes et des fractions de polynômes, et de toute manière des problèmes grecs sur les extrêma

ii) détermination des tangentes des courbes connues à l'époque, tant algébriques que transcendantes[15]

iii) détermination du centre de gravité des paraboloïdes de révolution sans faire usage de la quadrature

iv) déduction de la loi de sinus pour la réfraction

v) (en principe) détermination des asymptotes pour hyperboles, conchoïdes, cycloïdes et cissoïdes

[14] Cela, évidemment, se traduit en termes modernes par le fait de considérer un accroissement arbitrairement petit de la variable independante qui, dans les "cas limites" considérés par Fermat, n'induit qu'une variation infinitésimale de la fonction.

[15]Il faut cependant remarquer que les adaptations de la *méthode* qui sont nécessaires pour qu'elle soit appliquée aux courbes transcendantes ne sont pas banales; on peut même les considérer comme des conditions *ad hoc*.

Nous pouvons confirmer cette interprétation en rappelant deux textes de Fermat: les dernières lignes de l'***Appendix***, de 1644 (déjà publié dans [1], et les premières lignes de la ***Doctrinam tangentium***, de 1640, dans la traduction de [2].

Fermat écrit:

> On peut de même ramener en général toute recherche de maximum ou de minimum à la construction géométrique d'une tangente; mais cela ne diminue en rien l'importance de la méthode générale, puisque la construction des tangentes en dépend, aussi bien que la détermination des maxima et des minima.(O.F. III, p.140)

La *méthode* est donc générale, et s'applique aux maxima et minima ainsi qu'aux tangentes. Le domaine des problèmes est défini par Fermat dans la ***Doctrinam tangentium***:

> La théorie des tangentes est une suite de la méthode, dès longtemps publiée pour l'invention du maximum et du minimum, qui permet de résoudre très aisément toutes les questions de limitations <dioristicae>, et notamment ces fameux problèmes dont les conditions-limites <determinationes> sont indiquées comme difficiles par Pappus (livre VII, préf.). (O.F. III, p.140)

Je crois avoir donné, dans les premiers chapitres, les arguments pour interpréter globalement la *méthode* en termes de domaine des *diorismòi* et technique de l'*adéquation*. Je veux ajouter ici que nous voyons dans les textes cités une conscience croissante du rapport entre ce que j'appelle la "logique" et géométrie" de la question. Fermat lui-même se rendait compte que son sujet et sa manière de *traduire en algèbre la comparaison de figures* étaient ouverts à de nouveaux développements. En particulier, j'espère que ce travail mette en évidence comment la confiance théorique qui poussait Fermat vers un projet de *méthode* aussi globale dérivait de l'apprentissage sur l'outil mathématique le plus puissant parmi les découvertes du XVIe siècle: la logistique spécieuse. C'est pourquoi j'affirme que ce qui est considéré primaire à notre époque dans l'analyse de Viète, c'est-à-dire son programme d'application de l'algèbre aux problèmes géométriques classiques,

était secondaire pour les disciples de Viète et leurs contemporains, pour lesquels la "nouvelle algèbre", l'algèbre symbolique, était l'*inventio mirabilis*.

Que d'autre part Fermat ait eu l'occasion de réfléchir sur les nouvelles méthodes ou sur la méthode dans la science, il n'y a pas de doute, à cause de son appartenance au milieu scientifique et au milieu de juristes humanistes. Un témoignage à ce propos est fourni par ses références à Francis Bacon: car en relation avec sa méthode en théorie des nombres Fermat reprit la frase du Chancelier: *Multi pertransibunt et augebitur scientia*. La première occurrence est déjà dans la lettre à Roberval du 16 août 1636.

Après avoir pris en considération la "conscience" de Fermat par rapport au statut de sa *méthode*, on est évidemment engagé à examiner jusqu'à quel point cette conscience de généralité était partagée par ses lecteurs. C'est ce que l'on fera dans la suite de ce travail.

Deuxième partie: la méthode de Fermat pour ses contemporains

1. Les échanges avec Roberval, Etienne Pascal, Mersenne, Cavalieri, Torricelli et la polémique avec Descartes

La *méthode* de Fermat ne fut publiée qu'en 1642, dans le ***Cursus mathematicus*** de Pierre Hérigone. Elle connut pourtant une certaine diffusion avant la publication, parmi les mathématiciens de Paris et les italiens en contact avec Mersenne. Nous allons consacrer la deuxième partie de ce chapitre à cette première phase de la diffusion, pour conclure avec la présentation de Beaugrand.

Nous savons, depuis la publication de la correspondance de Fermat[16], que Roberval fut parmi les premiers à être mis au courant de la découverte de la *méthode* et de ses applications, comme nous l'avons vu dans la première partie de ce chapitre. En effet, si la première lettre à Mersenne est du 26 avril 1636, la lettre à Roberval qui donne la liste la plus complète des applications de la *méthode* est du 22 septembre 1636. Lettre après lettre, on peut voir comment Roberval apprenait les techniques de Fermat et les appliquait à d'autres cas. Peut-on supposer qu'il comprenait la *méthode* et sa portée? Je crois que oui, étant données les admissions de Fermat lui-même à l'occasion des (rares) fois où Roberval trouva des erreurs dans les résultats de Fermat. Sa compréhension de la *méthode* a été mise en doute à cause des interventions au cours de la querelle entre Fermat et Descartes, mais je propose de ne pas surestimer ces échanges, d'autant plus que l'on ne voudrait pas juger de la compréhension de Descartes lui-même sur la base de ses premières lettres sur le sujet. Cela vaut aussi pour le partenaire de Roberval pendant la querelle, c'est-à-dire Etienne Pascal. Ce que je veux remarquer est qu'ils n'ont pas soulevé d'objection du genre de celles de Descartes (la détermination de la tangente n'est pas un cas de minimum; Fermat ne donne de procédure de tangente que pour la parabole, parce qu'il fait usage de la propriété de la parabole), ni aux aspects qui inquiètent le lecteur moderne, comme le terme *adaequatio* ou la division par zéro. Mais cela ne veut pas dire qu'ils n'avaient rien compris ou qu'ils n'avaient pas pensé au sujet. Car d'une part, ils étaient en effet en mesure de souligner au moins quelques uns des défauts du raisonnement de Descartes, et de défendre la *méthode* contre ses attaques; d'autre part, il faut se rappeler que Descartes non plus ne critiqua les autres aspects de la *méthode*, et au contraire il donna une excellente définition de l'*adaequatio* dans sa lettre à Mersenne du 3 mai 1638[17].

---

[16]Dans le deuxième volume de O.F..

[17]Voir O.F.II, p.142: "Adaequentur tali modo ut quantitas per istam aequationem invenienda sit quidem una cum ad maximam aut minimam refertur, sed una emergens ex duabus quae per eandem aequationem possent inveniri essentque inaequales, si ad minorem maximâ vel ad maiorem minimâ referrentur."

Quant à Mersenne, nous pouvons supposer qu'il comprit la *méthode* de Fermat, comme toute autre découverte qu'il contribua activement à diffuser. Il serait important, à ce propos, de déterminer si l'hypothèse évoquée par Mahoney, selon laquelle Mersenne s'occupa de corriger la présentation d'Hérigone de la *méthode* de Fermat, correspond à ce qui est arrivé.

Que Mersenne ait contribué à diffuser la *méthode*, il n'y a pas de doute: et Fermat savait bien qu'en envoyant sa lettre à Mersenne le 26 avril 1636 il pouvait compter sur la diffusion de sa *méthode* parmi les mathématiciens, aux moins parisiens. Mais il eut aussi un rôle par rapport à la diffusion de la *méthode* chez les Italiens: on verra quelques lettres importantes au sujet de cette diffusion dans le prochain chapitre, mais je peux rappeler ici qu'il envoya l'***Analytica*** à Torricelli vers décembre 1644[18]. Ce texte fut perdu, et ce fut Ricci qui envoya à Torricelli l'***Analytica*** et la ***Doctrina tangentium***[19]. Il faut pourtant remarquer que la première diffusion de la *méthode* en Italie est due plutôt à Beaugrand, qui voyagea en Italie vers septembre 1635, donc avant la lettre de Fermat à Mersenne mais après l'invention de la *méthode* (Fermat la date de 1628 environ): et Beaugrand étant l'ami de Fermat, on peut être sûr qu'il était au courant. Cavalieri apprit la *méthode* de cette manière, puisqu'il reçut la visite de Beaugrand, ce qui créa probablement l'attente de nouvelles plus précises, qui arrivèrent plus tard, de la part de Mersenne. Mersenne lui-même, d'ailleurs, fit son voyage en Italie en 1646[20], et sur la voie du retour il rencontra Fermat à Bordeaux.

Nous n'avons pas beaucoup de renseignements sur la réaction des mathématiciens italiens à la *méthode* de Fermat. On peut affirmer cependant

---

[18]Voir les lettres: Mersenne à Torricelli (25-12-1644), [44] XIII, p.286; Torricelli à Mersenne (17-1-1645), [44] XIII, p.324.

[19]Voir la lettre de Ricci à Torricelli du 12-3-1645, [44] XIII pp.301-302, ainsi que celle du 26-3-1645.

[20]Je me borne ici à renvoyer aux nombreuses lettres qui témoignent de ce voyage et de ses détails contenues dans [44] XIII.

que Ricci manifeste à Torricelli un grand intérêt pour l'invention de Fermat, et que dans deux lettres il en souligne précisément la généralité:

> ... cento esempi, e in tutti mirabilmente cammina l'unica regola del Fermat. (26-2-1645, O.F.Suppl., p.137)

ou encore

> Il metodo di Monsù Fermat cammina sempre in un modo ed è il medesimo che s'insegna nell'operetta *Syneresi* <sic> *et Anastrophe*... Oltre che l'ha egli promosso all'invenzione dei centri di gravità alla misura dei piani e dei solidi, al ritrovamento degli asintoti, cose che finalmente abbracciano tutta quasi la Geometria. (12-3-1645, ib. p.138)

Il s'agit d'une réaction très positive et rapide, puisque encore le 4 février Mersenne envoyait l'***Analytica*** (que l'on appelait ***Syncriseos et Anastrophes***) à Torricelli (voir O.F.IV, pp. 85-87), et le 11 mars Torricelli affirmait ne pas comprendre beaucoup à la *méthode* (O.F.Suppl.p.138).

Quant à Descartes, il faut supposer que sa façon de voir la *méthode* de Fermat se reflète, du moins en partie, dans la querelle sur la *méthode* elle-même. A ce propos, je ne peux que renvoyer à l'importante littérature sur le sujet, en particulier à l'étude classique de Duhamel et à celles plus récentes de Schneider et Mahoney[21].

Nous pouvons pourtant remarquer deux points: d'abord, que Descartes avait au moins un avantage sur tous les autres lecteurs de Fermat de la première génération, c'est-à-dire qu'il possédait à son tour une méthode qui lui permettait de déterminer toutes les "lignes ou poins, à qui chaque ligne courbe aura quelque rapport plus particulier" (***Géométrie***, p 341): tangentes, normales, etc. L'idée que tous les problèmes de ce genre pouvaient se résoudre d'une façon uniforme et par une méthode générale dans sa conception n'était donc pas nouvelle pour Descartes, et à la fin de la querelle avec Fermat, quand il reconnut la valeur de la *méthode*, il dut admettre que les deux méthodes étaient comparables en ampleur de

[21]Voir Duhamel, [66]; Schneider [81], et le chapitre IV de Mahoney [82].

conception et d'application. Il reste vrai (et cela doit être à l'origine de sa critique de la notion de dépendance de la procédure des extrêma de celle des tangentes) que Descartes concevait la généralité en termes de courbes, et le but de la méthode générale dont il parlait dans le deuxième livre de la ***Géométrie*** concerne les tangentes, les normales etc., c'est-à-dire celles que Leibniz appellera plus tard *functiones*. Par contre, la *méthode* concernait, comme on l'a vu, une classe de problèmes, les problèmes des *diorismòi*, et les fonctions des courbes seulement comme une sous-classe de ces problèmes. Ainsi, du point de vue rétrospectif, Descartes a une vision des maxima et minima plus semblable à la nôtre, c'est-à-dire en rapport aux courbes, et se pose la question de la construibilité des courbes en tant que solutions de problèmes. Fermat, de son côté, travaille davantage sur le traitement algébrique de la comparaison de figures sans se poser autant que Descartes la question de retraduire le résultat algébrique en termes de construction géométrique[22].

La deuxième remarque concerne encore la position de Descartes par rapport au sujet de la *méthode*: nous savons par plusieurs sources (commentaire de Leibniz à la ***Vie de M.Descartes*** de Baillet, lettre de Debeaune à Mersenne[23] que Descartes ne s'occupa des problèmes des maxima et minima et tangentes qu'après avoir entendu parler de Fermat. Nous avons aussi le témoignage de Pell, peut-être le plus clair:

> Des Cartes when he was here, said yt he had never thought of any such probleme till they sent him that rule of Monsr Fermat, which said he examined & sent him instances of cases wherein it would faile.([44], XIV, p.164)

Par cette citation je n'entends pas soulever des questions de priorité, mais seulement suggérer que, du moins par rapport aux questions que nous appelons différentielles, ce fut plutôt Fermat à posséder ce que l'on peut

[22]Voir à ce propos les travaux de Bos sur les courbes en tant que problèmes et en tant qu'outil de construction, et en particulier [89].

[23]Voir [44] XV, p. 150.

appeler une méthode, et non pas seulement des techniques *ad hoc*, et que cela lui faisait espérer d'obtenir des résultats, selon les mots de Ricci, dans tous les domaines de la géométrie.

Nous pouvons maintenant prendre en considération la présentation de Beaugrand. Je peux anticiper que, si chez les lecteurs contemporains précédemment cités nous pouvons penser que la notion d'*adaequatio* était raisonnablement claire, et particulièrement pour Descartes, dorénavant nous ne trouverons plus de référence ni au terme ni à la notion qui pourtant aurait dû expliquer la procédure de Fermat.

2. La première interprétation: l'exposé de Beaugrand

Parmi les auteurs qui écrivirent des exposés des procédures de Fermat et qui contribuèrent ainsi à leur diffusion (et à leur transformation), Jean de Beaugrand joua un rôle particulier. D'abord pour l'importance de l'innovation qu'il introduisit, en l'occurrence la notation **a + o** à la place de **a + e** (ou plus précisément de A+E). Par cela, la différence finie entre les deux racines qui avait motivé la procédure de Fermat devenait sans équivoque infiniment petite dès le début. En deuxième lieu, Beaugrand se distingua parce qu'il ne mentionna pas le nom de Fermat comme auteur de la procédure à laquelle il consacrait un essai.

Il y a très peu d'informations sur Beaugrand[24]. On sait qu'il vécut entre 1595 et 1640 environ, qu'il naquit à Paris, qu'il passa la première partie de sa vie à Bordeaux où il commença une carrière d'avocat et de parlementaire. Il fut ami et disciple de Viète et, étant déjà connu comme mathématicien, il obtint une aide de Gaston d'Orléans qui lui permit de quitter son poste et de ne s'occuper que de mathématiques.

[24]Je vais donc les puiser dans l'article du [103] (par Henry Nathan), et dans la présentation que fait de Waard de l'écrit de Beaugrand sur la *méthode* de Fermat, en O.F. Suppl, pp.98-114.

En 1631, il publia à Paris le ***In artem analyticen Isagoge*** de Viète, avec des scolies et un compendium mathématique.

Autour de 1628, à Bordeaux, il fait la connaissance de Fermat, et Mahoney suggère que Beaugrand aurait été le précepteur de mathématiques du jeune Fermat[25]; en particulier, c'est lui qui l'aurait initié à l'algèbre de Viète.

En 1635, il alla vivre à Paris, où il fut d'abord membre de la commission qui devait juger de la méthode de Morin pour la détermination des longitudes, et ensuite secrétaire du roi, sous la direction de Pierre Séguier.

Il devint, à cette époque, le dépositaire des manuscrits de Fermat à Paris. On sait avec certitude que Fermat lui envoya l'écrit sur l'application de la méthode à la détermination des centres de gravité et que Beaugrand possédait une copie de l'écrit de Fermat sur la construction d'une parabole étant donnés quatre points.

Avant 1636, Beaugrand écrivit un ouvrage resté à l'état de manuscrit, la ***Parabolométrie***, maintenant perdu. Il semble avoir traité de paraboles d'ordre supérieur, soit du genre de paraboles introduite par Fermat.

C'est d'ailleurs ce dernier qui fait mention de l'oeuvre de Beaugrand: en annonçant sa quadrature de la parabole cubique

> Comme, par exemple, si vous imaginez une figure comme la parabole, en telle sorte que les cubes des appliquées soient en proportion des lignes qu'elles coupent du diamètre. Cette figure approchera de la parabole et ne diffère qu'en ce qu'au lieu qu'en la parabole on prend la proportion des quarrés, je prends en celle-ci celle des cubes; et c'est pour cela que M. de Beaugrand , à qui j'en fis la proposition, l'appelle *parabole solide*. (O.F. II, p.73).

C'est Beaugrand lui-même qui cite cet ouvrage précisément dans l'écrit sur la *méthode* de Fermat.

En 1636, il publia à Paris une oeuvre géostatique ***Geostatica seu de vario pondere gravium secundum varia a terrae centro intervalla dissertatio***

[25]Mahoney, [82] p.49.

mathematica où il soutient la thèse selon laquelle le poids d'un corps est directement proportionnel à sa distance du centre de gravité.

Je n'entrerai pas ici dans les détails de la discussion sur la géostatique; qu'il suffise de remarquer qu'une controverse s'en suivit qui a nui beaucoup à la carrière de Beaugrand car presque tous ses contemporains critiquèrent la thèse principale de cet écrit.

Il y eut une exception, toutefois: Fermat était d'accord avec Beaugrand en ce qui concerne la géostatique; en effet, ses écrits sur le sujet défendent la même thèse fondamentale - sans doute cela ne lui fut-il d'aucun avantage auprès du public des scientifiques parisiens.

Si, dans le milieu des mathématiciens, sa réputation souffrit, Beaugrand restait cependant secrétaire du roi et, comme tel, il signait les "privilèges du roi" qui autorisaient les publications.

Ce fut le cas, par exemple, du texte du ***Discours de la méthode*** de Descartes, comprenant trois traités et envoyé par Descartes à Mersenne au printemps 1637 pour qu'il s'occupe de sa publication en France. Beaugrand envoya alors à Fermat une copie de la ***Dioptrique***, à l'insu de Mersenne et, bien sûr, de Descartes.

Les remarques sur ce texte que Fermat envoya à Mersenne en avril ou mai 1637 ouvrirent la controverse sur la loi de la réfraction entre Fermat et Descartes, mais Beaugrand peut être considéré responsable de l'âpreté du ton de cette controverse, à cause de son manque de diplomatie. En 1638, quand la polémique se déplaça sur la *méthode* de Fermat, Beaugrand s'occupa plutôt d'alimenter la critique du ***Discours*** de Descartes et de sa géométrie en particulier, en envoyant à Mersenne une lettre ([22] V, pp.503-512), trois pamphlets anonymes, et l'écrit sur la méthode pour les tangentes, que j'examinerai ici.

Le fait que Beaugrand ne mentionne pas Fermat comme auteur de ce qu'il a appelé *sa méthode* fut remarqué. Desargues, qui par ailleurs avait d'autres raisons de polémiquer avec Beaugrand (c'était Desargues qui avait incité Guy de la Brosse à écrire contre la ***Geostatica*** de Beaugrand), publia, en 1640, un texte[26] où il précisa que Beaugrand n'avait donné qu'un bon

[26]Desargues [19], cité par de Waard, O.F. II, p.114.

exposé de la méthode des tangentes de Fermat. De Waard va même jusqu'à interpréter un passage de la lettre de Fermat à Frenicle, datée 18 octobre 1640, comme une allusion irritée au comportement de Beaugrand:

> (...) et afin de vous rendre vous-même juge de cette vérité, et vous ôter en même temps le scrupule que vous pourriez avoir, que j'en use comme quelqu'un de ceux du lieu où vous êtes, qui s'attribue impunément les inventions d'autrui, après qu'elles lui ont été communiquées...(O.F. II, p.207).

La polémique devait suivre Beaugrand jusqu'après sa mort, autour du 22 décembre 1640. Blaise Pascal, qui, dans ses premiers écrits sur l'histoire de la Roulette avait accusé un mathématicien, sans en préciser le nom, d'avoir participé à la compétition avec les résultats d'autrui, écrivit, en 1658, sans réticences cette fois, que

> en 1638, feu M. de Beaugrand, ayant ramassé les solutions du plan de la Roulette, dont il y avoit plusieurs copies, avec une excellente méthode de maximis et de minimis de M. de Fermat, il envoya l'une et l'autre à Galilée, sans en nommer les auteurs[27].

Mais de Waard met en doute le témoignage de Pascal sur cet envoi et fait remarquer qu'on ne connaît pas d'écrit qui corresponde à cette description. La seule trace en est une démonstration par Beaugrand de la formule qui, "insérée dans une lettre de huit feuilles" (voir encore de Waard, p.144; malheureusement, de Waard ne précise pas le contenu de ces huit feuilles), fut envoyée par Mersenne à Cavalieri, et ensuite par celui-ci à Galilée.

Ceci ne nous renseigne donc pas beaucoup sur le dernier coup de main de Beaugrand, mais nous donne un autre aperçu de l'activité mathématique de ce personnage.

De quoi est-il question dans l'exposé sur la *méthode* de Fermat? L'hypothèse de l'éditeur de Waard (O.F. Suppl., p.101) est que ce texte

[27]Pascal [49], ***Histoire de la Roulette***, 1658, p. 194.

serait le même auquel Debeaune fit allusion dans sa lettre à Roberval du 10 octobre 1638, dans laquelle il écrivait

> de m'envoyer au plus tost, par notre messager, la methode de M. Fermat, que vous m'avez promis, avec l'analyse de la première ligne pour m'en servir d'exemple.

Or, il est vrai que cet écrit contient la détermination de la tangente à la courbe qui est une solution du premier problème de Debeaune, et que Roberval et Fermat étaient amis. Mais, ne reconnaissant pas explicitement Fermat comme l'auteur de la *méthode*, Beaugrand donne l'impression de proposer celle-ci comme *son* pendant à la règle de Descartes

> pour te mieux faire connoistre les deffauts de la façon de S. de Cartes...je veux te montrer l'artifice...(O.F. Suppl., p.102)

En outre, il mentionne Fermat mais à la fin et en ces termes:

> Je te communiquerai la démonstration de la tangente de l'hélice d'Archimède,..., que je fis il y a quelque temps à la prière de M. Fermat, conseilleur au parlement de Tholoze. (O.F. Suppl., p.113)

ce qui disqualifie, encore plus que son silence, son rôle dans l'invention de la *méthode*.

Il y a donc des éléments qui confirment l'identité de cet écrit avec celui réclamé par Debeaune, mais aussi des éléments qui indiquent le sens contraire. La deuxième hypothèse est celle de Mahoney: il s'agirait ici d'une lettre de Beaugrand à Thomas Hobbes. Cette conclusion[28] n'est pas argumentée, mais en effet le manuscrit de ce texte est de la main de Thomas Hobbes qui, comme le mentionne de Waard (O.F. Suppl. p.98, note), avait rencontré Beaugrand en 1634, à Paris; et Hobbes retourna successivement à Paris en 1636 et de 1640 jusqu'à 1650. En outre, l'écrit a le style d'une lettre.

---

[28]A ce propos, voir Mahoney, [82] p.50, note 58.

Quant à la question de l'auteur de la *méthode*, soulignons qu'il y a quelques circonstances pour rendre compte, sinon justifier, le silence de Beaugrand au sujet de Fermat. D'abord, on sait que Fermat connaissait Beaugrand depuis 1628 environ et que Fermat, en 1638, (dans la ***Méthode expliquée***) déclarait avoir développé ses résultats depuis "huit ou dix ans et que plusieurs personnes qui les ont vues depuis cinq ou six ans le peuvent témoigner" (O.F. II, p.162).

Il est donc fort possible que Beaugrand, à Bordeaux, ait pu voir le début de l'élaboration de la *méthode*. On pourrait donc penser que Beaugrand a omis le nom de l'auteur parce que pour lui c'était tout à fait évident. En outre, ceci ne contredit en rien la première possibilité, on peut imaginer que Beaugrand ait considéré la règle proposée contre celle de Descartes comme certainement "affiliée" à celle de Fermat mais présentée d'une façon un peu différente. Autrement dit, on pourrait attribuer à Beaugrand lui-même la conscience des variations apportées à la *méthode* de Fermat qui caractérisent la version de Beaugrand.

Il nous faut donc examiner de près en quoi cette version consiste. A cette fin, je l'ai exprimé d'abord sous forme de règle bien que Beaugrand se soit borné à l'appliquer à différents cas.

La règle présentée par Beaugrand pour la détermination des tangentes peut se résumer de la façon suivante.

1) d'un point E externe à la courbe on trace une sécante à la courbe donnée par le point connu C, et un autre point H sur la courbe;

2) C détermine deux segments sur le diamètre (dans le cas de l'ellipse) et son ordonnée CD. On assignera une lettre à chacun de ces segments. On appellera **a** le segment à déterminer DE. H et son ordonnée détermine aussi le point G sur le diamètre. On pose DG = **o**;

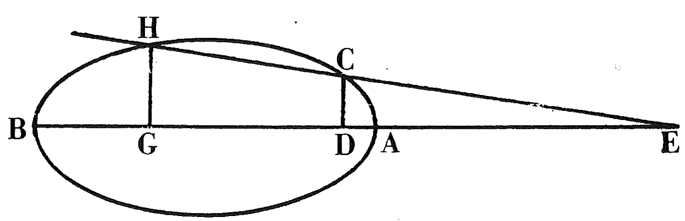
3) on écrit la proportion due à la similarité des triangles;

4) on remplace la valeur de GH obtenue par 3) dans l'équation de la courbe;

5) on élimine les termes communs, on divise par **o**;

6) puisque au point de tangence DG = 0, on efface les termes mutipliés par **o**;

7) on obtient alors une équation dont la seule inconnue est **a**.



Si maintenant on la compare à celle de Fermat, c'est-à-dire au schéma de la procédure de la ***Doctrina tangentium*** donnée au deuxième chapitre, on remarquera les variantes suivantes:

à propos de 1) Fermat ne trace pas de sécante mais trace directement une tangente selon l'approche de l'analyse grecque.

à propos de 2) - 6) chez Fermat on n'a qu'une *adaequatio*, ici on a une "vraie" égalité, puisqu'on travaille sur une sécante et que les points C et H sont vraiment en commun entre la droite et la courbe.

à propos de 6) notation avec **o**; c'est la différence la plus importante par rapport à Fermat et aussi à cause de l'influence que cette notation eut dans la transmission de la méthode de Fermat.

Il convient de retourner au texte de Beaugrand pour savoir dans quel but il introduisit cette innovation. Au sujet des conventions notationnelles, Beaugrand écrivit: "et la ligne GD <nous l'appellerons> **o**, pour la rayson que je toucheray ci-après".

Plus loin, à propos de la tangente de l'ellipse ou point B,

> il est nécessaire que la ligne GD *soit o, c'est-à-dire nulle* auquel cas il est très évident que toutes les quantités qu'elle aura multipliées sont nulles, et qui, si vous les ostez de la précédente équation... (O.F. Suppl., p.103; c'est moi qui souligne).

Beaugrand mit donc en évidence précisément cette division par zéro que le contexte et la notation de Fermat avaient évitée.

Mais, comme ses contemporains d'ailleurs, il ne s'inquiéta pas de cette difficulté et nulle part dans le texte il ne la souligna comme problématique. En effet, la polémique sur les infiniment petits et les zéros qui portait tant sur des problèmes de cohérence, que sur des problèmes de notation, commença après le développement du calcul infinitésimal de Newton et de Leibniz. Cependant, on considère en général les procédures de Fermat comme les premières à avoir pu attirer des critiques contre les infiniment petits. D'après Margaret Baron, la version de Beaugrand introduisit en plus des problèmes de notation que l'on discuta pendant longtemps. Elle écrit:

> The introduction of this unfortunate symbol to denote a quantity which was ultimately to be put equal to zero, i.e. o = 0, might have been of little significance had the matter ended here. Beaugrand, however, travelled extensively in Italy where he had many contacts and it seems likely that James Gregory, who subsequently made use of the symbol, saw a copy of this method distributed in Italy by Beaugrand. Isaac

Newton appears to have hit on the same symbol by chance but his use of it gave rise to much controversy.[29]

Nous avons vu quelques aspects de la portée de l'exposé de Beaugrand sur la méthode des tangentes de Fermat. Mais quel était le but de cet écrit? Beaugrand semble avoir, dans ce texte, une seule intention explicite: critiquer la méthode de Descartes pour les normales en lui opposant une autre règle qui ne présenterait pas les mêmes désavantages. D'ailleurs Tannery définit cet écrit comme "une des lettres circulaires qu'il écrivit contre la ***Géométrie*** de Descartes" ([123] t. VI, n.27, p.464). Cela est déjà annoncé au début de l'écrit:

Pour te mieux faire connoistre les deffauts de la façon du S. des Cartes pour trouver des lignes droites qui coupent les courbes données à angles droicts....

Beaugrand présente la *méthode* comme

...l'artifice dont il est vraysemblable que Apollonius s'est servy pour trouver les tangentes des sections coniques, qui est général et qui peut estre employé à toutes sortes de lignes courbes sans aucune exception,

et l'illustre justement sur les sections coniques: il résout le problème de la détermination de la tangente à l'ellipse, et énonce la solution pour l'hyperbole et la parabole. Jusque là, rien de nouveau, sauf la référence explicite à Apollonius.

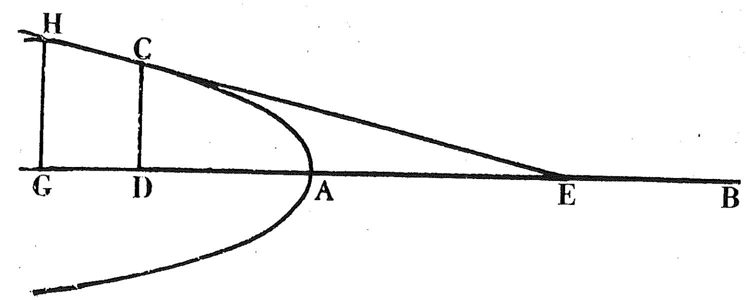
Ensuite, Beaugrand donne la définition d'une courbe nouvelle (non classique) qui, selon son affirmation, a été traitée dans son essai ***Parabolométrie*** et il donne la solution du problème de détermination de sa tangente. Je vais examiner ce problème en détail, s'agissant d'une nouvelle courbe, même si la détermination de sa tangente ne présente pas un intérêt particulier puisqu'elle est algébrique et donc évidemment susceptible d'être réalisée par l'application de la *méthode* de Fermat.

---

[29] Voir M. Baron, [86], p.173.

Cette digression commence par le texte de Beaugrand:

Mais, si au lieu d'une Ellipse ou d'une Hyperbole, vous concevez que ACH soit une ligne courbe, dont la nature soit telle *que les lignes DC, HG, S, T, X, Z,* etc. *y estant continuellement proportionnellles, le rectangle BDA soit au rectangle BGA comme DC à T ou comme DC à X ou bien comme DC à Z,* si vous faictes la ligne DE de telle mesure que *BD soit à DA comme BD plus DE, ou comme BD plus 2DE, ou bien comme BD plus 3DE, etc. y est à AE,* la ligne droite HEC touchera chacune de ces courbes. (O.F. Suppl. p.104)



Reconstruisons d'abord la courbe à partir de la définition verbale donnée au début. Ensuite, elle sera comparée à la courbe obtenue en intégrant la fonction déterminée par la sous-tangente.

La définition (ou propriété) de la courbe "...les lignes DC, HG, S... y étant continuellement proportionnelles,...." que nous écrivons

$$\frac{BD \times DA}{BG \times GA} = \frac{DC}{T} = \frac{T}{X}, \ldots$$

peut être interprétée, dans notre notation, comme $\frac{f(x)}{f(x_1)}=\frac{f(x_1)}{S}=\frac{S}{T}$ donc

$$S=\frac{(f(x_1))^2}{f(x)}\ , \quad T=\frac{(f(x_1))^3}{(f(x))^2} \quad \text{etc.}$$

c'est-à-dire, par rapport au dessin, avec ED = a, BA = b, AD = x, CD = y, de $\frac{(x+b)x}{(x_1+b)x_1}=\frac{f(x)}{T}$ on aura que $\frac{(x+b)x}{(x_1+b)x_1}=\frac{f(x)\times(f(x))^2}{(f(x_1))^3}$ c'est-à-dire

$\frac{(x+b)x}{(x_1+b)x_1}=\frac{f(x)^3}{(f(x_1))^3}$ où $f(x)=\alpha\sqrt[3]{(x+b)x}$; cela est vrai si l'on s'arrête à T.

On peut d'ailleurs vérifier que pour X on obtient $f(x)=\alpha\sqrt[4]{(x+b)x}$

Puisque l'on peut déterminer la sous-tangente d'après la *méthode* de Fermat, on obtiendra $a=\frac{3(x+b)x}{2x+b}$ ce qui peut être transformé, par la règle de soustraction pour les proportions, en les suivantes:

$$\frac{3(x+b)}{2x+b}=\frac{a}{x}$$

$$\frac{x+2b}{2x+b}=\frac{a-x}{x}$$

$$\frac{2x+b}{x}=\frac{x+2b}{a-x}$$

$$\frac{x+b}{x}=\frac{2(x+b)-a}{a-x}$$

Mais, malheureusement, cela ne coïncide pas encore avec le résultat de Beaugrand, qui est

$$\frac{x+b}{x}=\frac{x+b+a}{a-x}$$

pour le premier cas.

En conclusion, si l'on doit croire la reconstruction proposée ici, c'est-à-dire que Beaugrand ait considéré les courbes de la forme $f(x)=\alpha\sqrt[n]{x(x+b)}$, leur tangente étant donnée par $\frac{x+b}{x}=\frac{(n-1)(x+b)-a}{a-x}$ son résultat pour les tangentes ne serait pas juste.

Si, au contraire, on veut considérer comme valide la valeur trouvée pour la sous-tangente et remonter par intégration à la fonction primitive on obtient[30] la courbe $y=\alpha\sqrt{\dfrac{x}{x+b}}$ qui n'a pas de rapport avec la définition de Beaugrand.

Beaugrand conclut cette première partie de sa présentation en affirmant que la méthode proposée est

> ...plus simple, facile et générale, et particulièrement si tu supposes que les ordonnées ne rencontrent pas leur diametre à angles droicts, comme il est nécessaire en sa méthode, si on ne veut s'embarasser dans un labyrinthe dont l'issue seroit extraordinairement difficile. C'est ce qui l'a obligé luy mesme, lorsqu'il a voulu pratiquer sa reigle en la ligne courbe, qu'il nomme *seconde parabole*[31], de conceuoir cette ligne comme engendrée par le mouvement d'une parabole sur son axe et non sur un diametre, qui est coupé obliquement par ses ordonnées.

Beaugrand détermine donc la tangente à la parabole cartésienne, définie par le mouvement d'une parabole sur un quelconque de ses diamètres. Puisqu'il s'agit encore d'une courbe algébrique, la méthode de Fermat s'y applique avec succès, il n'est pas nécessaire d'entrer dans les détails de la solution.

Ce qui mérite d'être considéré, c'est la motivation de Beaugrand à fournir cet exemple.

---

[30]Beaugrand donne $\dfrac{x+b}{x}=\dfrac{x+b+a}{2-x}$, d'où on obtient $a=\dfrac{2x(x+b)}{b}$ sachant que $a=\dfrac{y}{f'(x)}$, on parvient à $y=\alpha\sqrt{\dfrac{x}{x+b}}$.

[31]Il s'agit de la parabole de Descartes, introduite dans la ***Géométrie***, dont l'équation est de la forme $pyx = -x^3 - ax^2 + bpx + pab$.

Beaugrand donne en effet la première application de la *méthode* de Fermat à la parabole cartésienne, ou comme le remarque de Waard[32], la première détermination analytique de sa tangente.

Outre à vouloir expliciter un résultat auquel on s'attendait, Beaugrand voulut montrer comment "sa" méthode, à la différence de celle de Descartes, permettait de ne pas limiter la définition de la courbe avec coordonnées rectangulaires. La méthode des normales de Descartes, dans son appel au théorème de Pythagore, demande qu'il y ait des angles droits entre les coordonnées.

La supériorité de la règle proposée par Beaugrand serait donc sa généralité et sa simplicité, et ces deux caractères se résument dans l'indépendance par rapport aux coordonnées.

C'est en relation avec cet aspect de la *méthode* de Fermat que J. Itard[33] a attribué à Beaugrand le mérite d'avoir reconnu l'une des qualités essentielles des mathématiques de Fermat, soit l'usage implicite du concept pour lequel Euler inventera plus tard le nom d'*affinité*. En particulier, la construction de la tangente à une courbe n'étant pas un problème métrique mais affine qui n'a aucun rapport avec l'orthogonalité des axes, Itard souligne que la *méthode* de Fermat semble placer la question dans le bon contexte; d'où la pertinence des remarques de Beaugrand.

L'objection de Beaugrand aux complications de la méthode de Descartes est illustrée ensuite par l'exemple d'une autre courbe "nouvelle", la première courbe de Debeaune. D'après Beaugrand, Debeaune voulait employer la méthode de Descartes pour déterminer la tangente à une courbe qu'il avait définie mais il y renonça à cause de la complexité des opérations impliquées.

En fournissant la solution à ce problème, moyennant la *méthode* de Fermat, Beaugrand intervient donc dans un débat actuel, même si encore une

---

[32]Voir de Waard, O.F. Suppl. p.108.

[33]Voir J. Itard, ***A propos d'un livre sur Pierre Fermat*** Rev. Hist. Sci., 1974, XXVII/4, pp.340-341.

fois le résultat n'est pas surprenant puisque la courbe, comme il le dira lui-même, n'est qu'une conique.

Or, la question du premier problème de Debeaune a été affrontée en détail par P. Tannery[34]. En bref, il montra que ce problème de Debeaune n'était pas le problème inverse à celui des tangentes comme le sont les trois suivants, mais tout simplement une tentative (qui a échoué) d'appliquer la méthode des tangentes de Descartes au lieu géométrique défini "par une relation simple qui conduit immédiatement à l'équation $x^2-xy-by = 0$ ".

Debeaune présenta cette question comme une difficulté de la méthode de Descartes et Descartes protesta qu'il s'agissait d'une hyperbole et donc qu'il n'y avait pas de problème. Debeaune réussit enfin à appliquer la méthode de Descartes à cette courbe, mais durant quelques mois il ne comprit pas pourquoi c'était une hyperbole. Beaugrand semble avoir eu la bonne façon de voir cette question, puisqu'il reconnut (probablement avant d'avoir entendu Descartes) que la courbe était une hyperbole et donc il ne parla pas d'impossibilité mais de difficulté d'application de la règle de Descartes. Plus précisément, Beaugrand mit en évidence que dans le cas suggéré par Debeaune, cas pourtant si simple, la méthode de Descartes impliquait déjà des calculs assez compliqués.

Beaugrand conclut son écrit en traitant la détermination de la tangente à la conchoïde. Ce résultat avait été annoncé par Fermat, mais sans solution, dans ***Doctrina tangentium***. Jensen [80] critiqua le résultat de Fermat en soulignant son désaccord avec le résultat obtenu par les méthodes modernes. Je renvoie donc à cet auteur pour une compréhension ponctuelle du texte.

Avant de tirer nos conclusions sur la présentation par Beaugrand de la *méthode* de Fermat, il paraît opportun d'introduire la présentation d'Hérigone, ce qui nous permettra d'établir une comparaison.

[34]P. Tannery, "Pour l'histoire du problème inverse des tangentes", dans [123], VII, n.27, 1904, p. 457-477.

CHAPITRE IV

LA PREMIERE PUBLICATION: HERIGONE

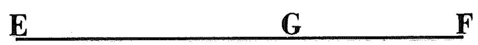
Je me propose d'étudier ici la première présentation publiée de la *méthode* de Fermat: le ***Cursus mathematicus*** de Pierre Hérigone[1]. Après une étude attentive des pages qu'Hérigone consacre à la *méthode* de Fermat, on essayera d'élargir la vision au contexte plus ample de l'ouvrage d'Hérigone, à ses buts et à son rôle. Cela ne nous permettra pas seulement de comprendre le cadre systématique de la publication de la *méthode* de Fermat ou son impact sur les lecteurs, mais aussi d'avoir un élément de comparaison, contemporain à Fermat, à propos de ce qu'on entendait par logistique spécieuse, art analytique, doctrine, méthode, et plus généralement à propos de la façon dont on écrivait les mathématiques.

1. La méthode dans le Cursus mathematicus: les procédures

La présentation que fait Hérigone de la *méthode* de Fermat se trouve au sixième tome du *Cursus*, dans le Supplément, et plus spécifiquement dans

[1]"***Cursus mathematicus, nova, brevi et clara methodo demonstratus, per Notas reales & universales, citra usum cuiuscumque idiomatis intellectu faciles. Cours mathématique, demonstré d'une nouvelle, briefve, et claire methode. Par notes réelles & universelles, qui peuuent estre entendues facilement sans l'usage d'aucune langue.*** Par Pierre Herigone, Mathematicien. A Paris, MDCXXXIV. Chez l'Autheur, en l'Isle du Palais, à l'enseigne de l'Anguille, & chez Henri Le Gras, au troisiesme pilier de la grande Salle du Palais. Avec Privilège du Roy." En 1634 furent publiés pour la première fois les quatre premiers volumes, le cinquième en 1637, le sixième en 1642. La deuxième édition parut en 1644.

le chapitre "L'Isagoge de l'algèbre"[2]. Le Supplément parût en 1642. La proposition XXVI a précisément le titre ***De maximis et minimis***, et commence tout de suite par la "*Quaestio 1: Trouver le plus grand rectangle contenu sous les segments d'une ligne droite donnée*". J'en donne ici la transcription.[3]



Hypothèse
FG et GE sont des segments,
EG . GF est maximum.
On demande le point G.
Analyse I
b = EF, a = EG, b−a = GF, EG . GF = ab − a2.
Analyse II
e est zéro.
a+e = EG,
b − a − e = GF,
EG.GF est ab − a2 − 2ae + eb − e2,
2ae + e2 = eb,

[2] Je sais que le catalogue de la British Library considère "Hérigone" comme un pseudonyme pour Cyriaque de Mangin, et que, plus récemment, Rider indiqua Cyriaque de Mangin comme l'auteur du ***Supplementum cursus mathematici*** (voir Rider, [119]). Cependant, je ne vois pas d'évidence pour décider contre les apparences et le témoignage de Fermat (voir O.F.I, p.171) et de Cavendish ([44] XIII, p.227 et [44] XIV, p.122).

[3] Ma transcription a transformé l'original de la façon suivante: a)en complétant les mots; b)en négligeant les scholies marginales. Cela efface deux aspects importants de l'exposé d'Hérigone, mais j'espère puisse rendre son texte plus lisible. J'ai pourtant gardé la notation pour les exposants qui fut adoptée ensuite par Debeaune, faisant suivre simplement la lettre par un numéro qui représente son exposant.

2a + e = b,
e est zéro.
2a = b,
a = 1/2b.

Hérigone fait suivre cet exemple classique par trois autres problèmes:

> Trouver le plus grand rectangle compris sous la moyenne, et la difference des extremes de trois lignes proportionnelles.
>
> Couper une ligne droite donnée en deux segments, qui ayent l'aggregé de leur quarrez le moindre de tous.
>
> Trouver le plus grand des cones droicts contenus sous egales superficies coniques.

On peut reconnaître ces problèmes comme variantes de quelques uns des problèmes affrontés par Fermat. Puisque le ***Cursus*** ne contient pas de procédure de la *méthode*, j'en donnerai ici une reconstruction, suivant le schéma déjà employé pour Fermat.

1) On suppose le problème résolu, et on l'exprime par une équation dans l'inconnue. On aura ainsi une expression pour l'extrêmum dans le premier membre.

2) On pose e égal à zéro, donc **a = a+e** , et on procède en remplaçant **a** par **a+e**.

3) On compare l'équation ainsi obtenue à la première en égalisant les premiers membres.

4) On élimine les termes communs.

5) On divise par e.

6) On ignore les termes multipliés par e.

Ce qui saute aux yeux est le fait que e soit *défini* comme étant égal à zéro. A part le problème de la division par zéro qui en dérive, on constate ici le caractère complètement artificiel du procédé, introduisant une quantité étrangère qui, de plus, est dès le début une quantité nulle. Il n'en va pas mieux avec la procédure des tangentes que je reconstruis à partir des exemples sur les coniques. Pour la figure, voir la page suivante.

1) On considère deux droites, données en position, sur le plan de la courbe: l'une est le diamètre, l'autre l'ordonnée.

2) On suppose le problème résolu, et donnés un point C de la courbe et une tangente à ce point.

3) On choisit un point arbitraire L sur la tangente et l'on trace la parallèle LN à l'ordonnée de C, CF. Elle rencontrera la courbe en un point I, et on aura IN < LN (ou, selon la concavité ou la convexité de la courbe par rapport aux axes, IN > LN).

4) On établit la proportion des triangles semblables, et l'on parvient ainsi à un rapport entre les portions du diamètre qui détermine la valeur de LN.

5) On assigne des "notes algébriques": **a** est la soustangente à chercher; **e** est le segment FN, et ainsi de suite pour les données.

6) On pose **e** = zéro.

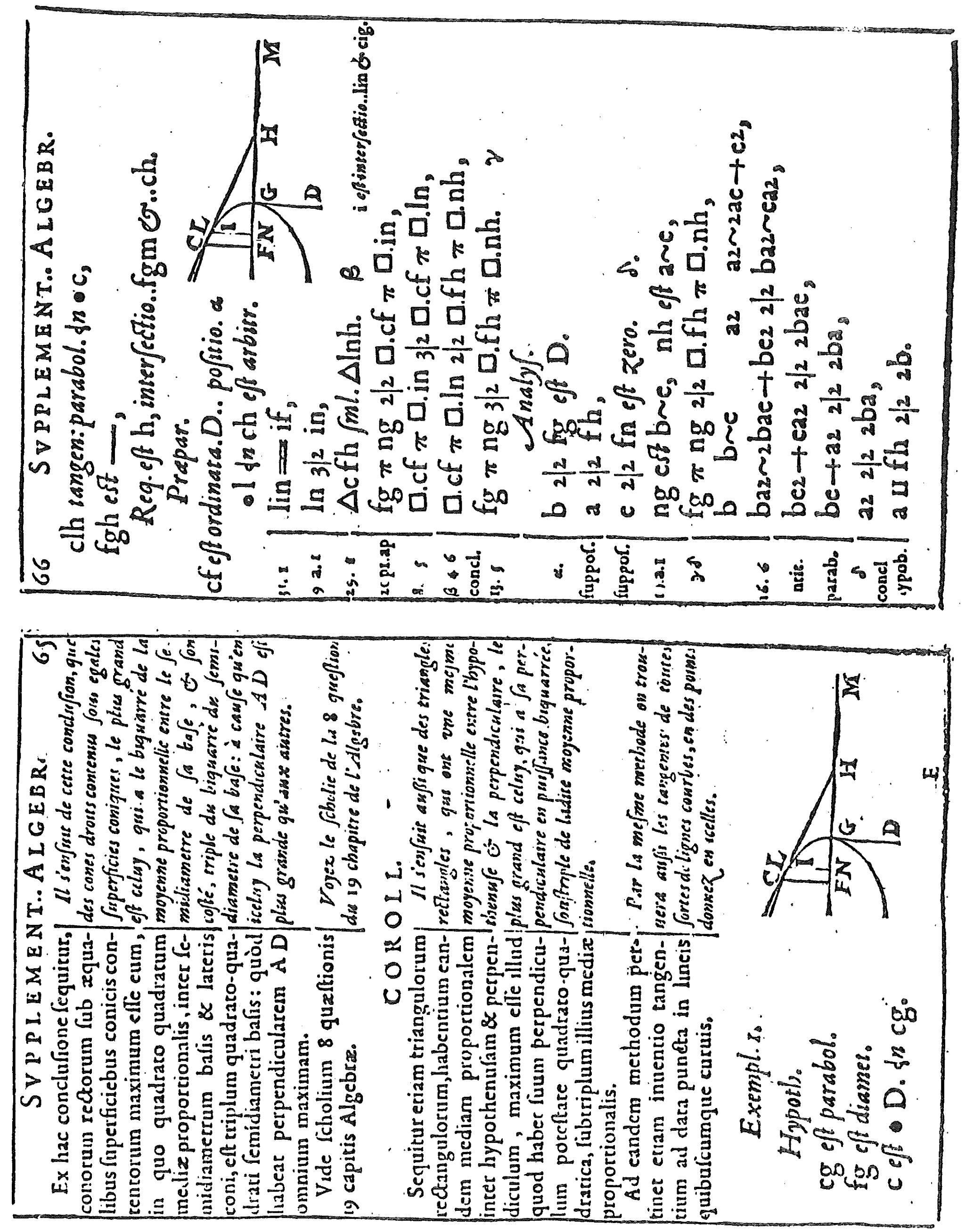
7) On écrit l'équation de la courbe en remplaçant IN par LN.

8) On élimine les termes comme le prescrit la *méthode* des maxima et minima[4].

[4] Pour familiariser le lecteur avec la notation d'Hérigone, je reproduis dans la page suivante la détermination de la tangente à la parabole. A la vingtième ligne de la page 66 les relations manquent. Il faut la lire:

$$b \ \pi \ b{\sim}e \ 2 \mid 2 \ a2 \ \pi \ a2{\sim}2ae{+}e2$$

c'est à dire $\dfrac{b}{b-e}=\dfrac{a^2}{a^2-2ae+e^2}$



SVPPLEMENT.. ALGEBR. 65

Ex hac conclusione sequitur, conorum rectorum sub æqualibus superficiebus conicis contentorum maximum esse eum, in quo quadrato quadratum mediæ proportionalis, inter semidiametrum basis & lateris coni, est triplum quadrato-quadrati semidiametri basis: quod habeat perpendicularem A D omnium maximam.

Vide scholium 8 quæstionis 19 capitis Algebræ.

Il s'ensuit de cette conclusion, que des cones droits contenus sous egales superficies coniques, le plus grand est celuy, qui a le biquarré de la moyenne proportionnelle entre le semidiametre de sa base, & son costé, triple du biquarré du semidiametre de sa base: à cause qu'en iceluy la perpendiculaire A D est plus grande qu'aux autres.

Voyez le scholie de la 8 question du 19 chapitre de l'Algebre.

COROLL.

Sequitur etiam triangulorum rectangulorum, habentium eandem mediam proportionalem inter hypothenusam & perpendiculum, maximum esse illud quod habet suum perpendiculum potestate quadrato-quadratica, subtriplum illius mediæ proportionalis.

Il s'ensuit aussi que des triangles rectangles, qui ont vne mesme moyenne proportionnelle entre l'hypotenuse & la perpendiculaire, le plus grand est celuy, qui a sa perpendiculaire en puissance biquarrée, soustriple de ladite moyenne proportionnelle.

Ad eandem methodum pertinet etiam inuentio tangentium ad data puncta in lineis quibuscumque curuis.

Par la mesme methode on trouuera aussi les tangentes de toutes sortes de lignes courbes, en des poincts donnez en icelles.

Exempl. 1.
Hypoth.
cg est parabol.
fg est diamet.
c est • D. ∆n cg.

66 SVPPLEMENT.. ALGEBR.

clh tangen: parabol. ∆n • c,
fgh est ——,
Req. est h, interfectio..fgm &..ch.
Præpar.
cf est ordinata.D.. positio. α
• l ∆n ch est arbitr.
51.1 | lin == if,
9 a.1 | ln 3|2 in,
25.4 | Δcfh sml.Δlnh. β — i est interfectio..lin & cg.
12 pr.ap | fg π ng 2|2 □.cf π □.in,
α 5 | □.cf π □.in 3|2 □.cf π □.ln,
β 4 6 concl. | □.cf π □.ln 2|2 □.fh π □.nh,
13.5 | fg π ng 3|2 □.fh π □.nh. γ
Analys.
α | b 2|2 fg est D.
suppos. | a 2|2 fh,
suppos. | e 2|2 fn est zero. δ
1.a.1 | ng est b~e, nh est a~e,
γδ | fg π ng 2|2 □.fh π □.nh,
| b b~e a2 a2~2ae+e2,
16.6 | ba2~2bae+be2 2|2 ba2~ea2,
| be2+ea2 2|2 2bae,
parab. | be+a2 2|2 2ba,
δ | a2 2|2 2ba,
concl. hypoth. | a 2|2 2b.

Ce qui paraît davantage ici c'est qu'on introduit le symbole **e** pour représenter à la fois un segment et une quantité nulle. Il faut remarquer aussi que les exemples de détermination des tangentes sont présentés dans le paragraphe "Corollaires", et introduits ainsi:

> Par la mesme methode on trouvera aussi les tangentes aux lignes courbes, en des poincts donnez en icelles.([35] Suppl., p.65)

Cela montre l'acceptation de l'avis de Fermat sur ce point, c'est-à-dire la dépendance de la méthode des tangentes de celle des maxima et minima.

2. Les versions de Beaugrand et d'Hérigone

Pour mieux reconnaître les choix faits par Hérigone et Beaugrand, nous pouvons maintenant établir une comparaison entre les présentations des deux auteurs, séparées de seulement trois ou quatre ans. Bien qu'aucun des deux auteurs n'ait donné une version algorithmique, on peut en effet "isoler" la procédure employée dans les exemples proposés.

D'abord, Beaugrand pense à la détermination des tangentes en termes de sécantes, tandis qu'Hérigone suit Fermat en ce qu'il ne parle pas de sécante mais uniquement de tangente, et en introduisant la détermination des tangentes comme application de la *méthode* de maxima et minima.

Deuxièmement, Beaugrand introduit la quantité **o** comme différente de **0**, et la pose égale à zéro "au point de tangence", tandis qu'Hérigone transforme *sans justification* un segment en **e = 0** au moment de la dénomination ou analyse: chez lui, pour la première fois, la géométrie disparaît au bénéfice de la pensée algébrique. Les deux auteurs n'ayant évidemment pas de sympathie pour la notion d'*adaequatio*, cruciale pour Fermat, ils choisirent de recourir à des moyens symboliques ou logiques qui entraînèrent d'autres problèmes, notamment l'ambiguïté de la notation **o** et **0** dans le cas de Beaugrand, et à une contradiction ouverte dans le cas d'Hérigone.

Nous avons déjà cité, dans le chapitre précédent, la remarque de Margaret Baron[5] à propos de la notation de Beaugrand avec **o**, et en particulier l'hypothèse que la notation de Gregory dépende directement de celle de Beaugrand et que Newton l'ait redécouverte. Or, ce que les manuscrits mathématiques de Newton nous indiquent est plutôt que Newton connut la *méthode* de Fermat avec la notation d'Hérigone et dans la présentation de Van Schooten, comme on verra en détail dans le prochain chapitre.

De toute manière, les remarques de Baron à propos de l'influence de la notation de Beaugrand sur les débats successifs sur le calcul infinitésimal peuvent être appliquées a fortiori à Hérigone: son texte fut publié et distribué parmi les savants un peu partout en Europe, et peut donc être considéré responsable d'une bonne partie des interprétations et des malentendus concernant la *méthode* de Fermat. Tout au moins, il contribua sans doute, avec la pièce de Beaugrand, à autoriser une lecture de la procédure de Fermat en termes de **e = 0**.

D'ailleurs, il est fort possible que Beaugrand et Hérigone aient parlé entre eux de la *méthode* de Fermat, et qu'il y ait eu un travail d'équipe quant à l'interprétation des textes du toulousain. Bien entendu, Beaugrand avait plus d'autorité en tant qu'ami et mentor de Fermat mais Hérigone était en train de préparer son ***Isagoge de l'algèbre*** quand Mersenne reçut le premier essai de Fermat (1636), juste après que les deux parisiens eurent participé à la commission pour la méthode des longitudes (1635; voir plus loin dans l'aperçu biographique d'Hérigone).

Ce qu'il faut pourtant remarquer à propos de la légitimité de la présentation d'Hérigone est que Fermat lui-même la connaissait et on en a la preuve puisqu'il l'a citée dans un de ses traités, ainsi que dans une lettre[6].

---

[5] Voir Baron, [86], p.173.

[6] Voir ***Analysis ad refractiones***, O.F.I, pp.170–172, ainsi que la lettre de O.F.II, p.463: "Je n'ai pas étendu mon opération,: et il n'a pas été nécessaire, puisque ma méthode est imprimée tout au long dans le sixième tome du ***Cours mathématique*** d'Hérigone et que j'en ai assez dit pour être entendu."

3. Hérigone et Fermat

La section *De maximis et minimis* se conclut, après les exemples de détermination des tangentes, par quelques remarques d'Hérigone qui méritent d'être reprises:

> Que la ligne droite menée du poinct trouvé H , au poinct donné C , touche la ligne courbe CIG en C , il n'y a point de doute, et cette methode ne manque iamais: ce que son inventeur asseure, qui est Monsieur Fermat, Conseiller au Parlement de Toulouse, excellent Geometre, & qui ne cede à aucun en l'art Analytique: lequel a aussi tres bien restitué tous les lieux plans d'Apollonius Pergeus, que nous les avons veu en cette ville manuscripts entre les mains de plusieurs, en suite desquels se trouve aussi du mesme autheur, une Isagoge, aux lieux plans et solides.(*Cursus*, t.6, pp.68–69)

Le début de ce passage cache sous les affirmations de certitude le doute légitime (et qui fut résolu par Fermat lui-même[7]) concernant la validité de la *méthode* dans les cas de convexité de la courbe par rapport aux axes. Quant au reste de ce passage, il s'agit du seul tribut d'Hérigone à Fermat, puisque nulle part ailleurs dans le *Cursus*, même pas dans le "Catalogue des meilleurs autheurs des mathematiques", Fermat n'est pas cité, à la différence de Descartes ou de quelques autres mathématiciens moins connus que lui déjà à l'époque. Le passage nous permet alors peut-être d'apercevoir le rôle que Fermat jouait dans l'esprit des mathématiciens parisiens contemporains: celui d'un grand géomètre qui travaillait à Toulouse dans la direction ouverte par Viète, soit celle de l'application de la logistique "spécieuse" ou symbolique aux problèmes de l'analyse grecque. De plus, on peut constater que son résultat le plus apprécié à l'époque était justement la *méthode*, le seul qui méritât d'être inclus dans le ***Cursus***. Tout

[7] Au moins dans la version de la méthode des tangentes présentée dans la ***Méthode expliquée***, FO.II, p.159. Toutefois, Fermat ne fut jamais très explicite sur ce point. Pour une discussion de la question, voir Mahoney [82], pp.168–169.

cela doit être nuancé par le double fait que la liste d'Hérigone est loin d'être à jour et, par ailleurs, qu'elle est clairement Paris-centrique. Mais avant d'analyser ce répertoire, il convient de dresser un portrait historique d'Hérigone.

4. Aperçu biographique d'Hérigone

On ne connaît presque rien de la vie d'Hérigone. Les rares sources contemporaines sont recueillies par Baldassarre Boncompagni[8] et Paul Tannery[9], auxquels on peut ajouter Henri-Jean Martin pour sa référence à l'inventaire de la bibliothèque d'Hérigone[10]. On peut affirmer avec certitude:

– qu'Hérigone était d'origine basque, ou même ressortissant du Pays Basque, puisqu'on l'a appelé Basque de son vivant[11];

– on ne connaît pas la date de sa naissance, mais on sait qu'il enseignait les mathématiques à Paris vers 1630, puisque Le Tenneur déclare avoir reçu des cours privés d'Hérigone, dans sa lettre à Mersenne datée du 9 juillet 1647;

[8] Dans Boncompagni, [88], 2 (1869), 472–476.

[9] Dans [62], X (Paris, 1930) 287–289.

[10] Voir Henri-Jean Martin, [118]. Malheureusement, la numérotation donnée par M. Martin est fausse, du moins ainsi qu'elle est imprimée dans son texte, ce qui m'a empêchée de consulter le document. D'autre part, on peut remarquer que Paul Tannery avait renvoyé implicitement à un document au sujet des "arrangements pris, par ses héritiers, pour écouler le stock nvendu" des exemplaires du ***Cursus***, qui est vraisemblablement le même (voir op. cit., p. 289).

[11] Voir la citation de la source dans [88], p. 476. Tannery remarque à ce propos. " J'en conclus qu'il avait francisé son nom, qui devait être quelque chose comme Hiérigoyen, forme que l'on rencontre encore dans ce pays".

- qu'il mourut avant le 3 mars 1643[12];

- qu'il appartenait, du moins à quelque titre, au cercle de Mersenne

- qu'il fut appelé par Richelieu à participer à la commission qui trancherait la question de la méthode de Morin pour les longitudes.

Je vais développer ici ces derniers points, en me référant surtout à la correspondance de Mersenne[13].

---

[12]Celle-ci étant la date de l'acte présent au Minutier Central et citée par Martin.

[13]Je crois qu'au moins deux autres pistes sont encore possibles pour approfondir la recherche sur la biographie d'Hérigone: l'étude des cosmographes et ingénieurs du roi à l'époque, et la prise en considération de quelques relations personnelles d'Hérigone avec, par exemple, François de Bassompierre à qui est adressée la dédicace du ***Cursus***.
1) Hérigone participa à la commission des longitudes et surtout il fut l'interlocuteur direct de Morin. Il est donc possible que la cosmographie ait été son domaine. En outre, le tome IV est particulièrement intéressant à cause de l'usage des notes dans des sujets comme les thèmes célestes, la théorie des planètes etc. En outre, le ***Catalogue***, par l'admission d'Hérigone lui-même, dépend largement de celui publié par le cosmographe jésuite italien Giuseppe Biancani (1566-1624) en appendice à son volume ***Aristotelis loca mathematica*** (Bononiae 1615). D'autre part, comme on le verra à la note 31, le cosmographe du roi N.Durret donna une traduction annotée d'oeuvres algébriques de Viète, qui est très proche de la version d'Hérigone. Il publia aussi plusieurs ouvrages en astronomie et géographie. Mersenne le cite dans sa célèbre lettre à Haack: "Pour l'astronomie, après Ptolomee, et quelques Arabes, tous ceux qui ont fait des tables, comme Alphons, Jean du Mont-Royal <Regiomontanus>, Kepler et notre Durret qui a fait les tables parisiennes, et le mesme pour les éphémérides qu'il dresse jusqu'à 1700 ans."
Les cosmographes et les ingénieurs du roi avaient ouvert la tradition des manuels mathématiques depuis la fin du XVIe siècle, avec, par exemple, Jean Errard (1554-1605), auteur de [28], qui fut souvent rééditée, ainsi que de [29]. Hérigone, dans sa bibliographie après le ***Catalogue***, cite un autre cosmographe du roi de la même période, Pierre Bert (1565-1629). Bert écrivit par exemple le [6] et [7].
2) On lit en effet: "au tres haut et tres excellent Seigneur, Messire Francois de Bassompierre, Marquis d'Hrouel, libre baron du S.Empire, Marechal de France, & colonel général des Suisses & Grisons entretenus pour le service de sa Majesté." Bassompierre (1579-1646) était une grande personnalité politique et militaire à partir de la fin du règne d'Henri IV. Nous connaissons plusieurs détails de sa vie d'après ses mémoires, dans lesquels cependant il ne donne pas d'éléments de connexion avec les scientifiques. Il entra à la Cour en 1598. En 1622 Louis XIII le fit Maréchal de France: il eut alors une grande influence dans les conseils du roi. Ce qui rend curieuse la dédicace d'Hérigone est qu'en

5. Hérigone et Le Tenneur

Nous savons par la lettre de Le Tenneur à Mersenne du 9 Juillet 1647 qu'Hérigone enseignait les mathématiques. Il écrivit en effet:

> Il est vray qu'il me prit fantaisie un jour de me faire expliquer par lui (Roberval) quelque theorique de planetes que je n'entendois pas. Mais, ayant recogneu apres quelques peu de visites qu'il avoit sy bien le don de s'expliquer que j'en faisois tout autant moy seul et que je n'avancois pas plus pour l'entendre parler, je luy envoiay de l'argent et le priay de ne plus prendre la peyne de venir. La mesme m'estoit arrivé quelques temps auparavant d'Hérigone que je quitay aussy bientost pour le mesme suiet. ([44] pp. 291-292).

Jacques Alexandre Le Tenneur publia le ***Traité des quantités incommensurables*** en 1640. Il fut ami de Mersenne. De Coste le cite dans sa biographie de Mersenne parmi ceux qui visitaient régulièrement le Minime dans sa cellule. On a maintenant plusieurs informations sur la diffusion de son texte grâce à la publication de la correspondance de Mersenne. On peut ajouter à ses affirmations au sujet d'Hérigone que probablement il y eût quand même une influence de ce dernier sur Le Tenneur, puisqu'il publia un ***Discours de la manière d'expliquer les sciences en françois***. Comme je le mentionne plus haut, cela fait remonter l'enseignement d'Hérigone à Le Tenneur à 1630 environ.

1634 Bassompierre résidait à la Bastille, ayant été emprisonné par Richelieu en 1631. Il y resta jusqu'en 1643.

6. Hérigone et Mersenne

Quant à la question des rapports entre Mersenne et Hérigone, on peut affirmer que Mersenne considérait Hérigone parmi les meilleurs auteurs français de textes d'algèbre, puisqu'il le cite avec Viète et Clavius parmi "les nouveaux les meilleurs" qui devraient entrer dans "le dessein de restablir les mathématiques en un feuillet", c'est-à-dire dans le projet de Pell pour son ***Idea of mathematics***. Nous connaissons, en effet, la réaction de Mersenne d'après sa réponse à Haack, à qui il écrivit:

> ...son dessein est louable. Mais au lieu du grand ramas qu'il propose de tous ceux qui ont escrit des Mathématiques il vaudrait mieux faire le choix d'une douzaine des meilleurs en chaque partie. Et après avoir aporté les Anciens, dont nous avons les livres, comme sont Euclide, Apollonius, Archimède, Théodose, Pappus, Ptolémée, etc. avec leurs oeuvres manuscrites qui n'ont pas encore vu le jour, et dont Golius à Leyde en a quelques-uns, et d'autres (sont) à Rome, l'ont metteroit les nouveaux les meilleurs, comme Vieta pour l'analyse, Clavius pour ses 4 ou 5 grands volumes et quelques autres, avec lesquels notre Hérigone, qui a fait imprimer depuis peu ses 5 volumes en Latin et François *e regione*, pouvait avoir lieu. Et en ceste maniere, l'on aurait tout ce qu'il y a de bon, sans se soucier du reste. De mesme pour l'optique, l'on metteroit Vitellion, Kepler, Aguiloniuys et M. de Ville, ingénieur, qui appreste un excellent traité sur ce sujet. Pour l'arithmetique, après Diophante, Cardan, Tartaglia, vostre Neper, etc. Pour les triangles sphériques et supputations par les logarithmes Briggius, Gordon, et nostre Morin, professeur aux mathématiques royales. (1 novembre 1639, [44] VIII, pp.581-582).

De cela on peut conclure que Mersenne était au courant de l'oeuvre d'Hérigone (le sixième volume n'ayant paru qu'en 1642), et qu'il la considérait parmi les meilleures oeuvres de ses contemporains. En outre, que son travail pouvait être comparé, de quelque façon, à celui de Clavius. La qualification "nostre" signifie "Français contemporain", et "vostre" Anglais contemporain.

Une lettre de Cavalieri à Mersenne semble indiquer, au moins, que Cavalieri pouvait compter sur Mersenne pour faire parvenir ses résultats à Hérigone et en recevoir des commentaires:

> Hoc ergo quod possum, aequi bonique faciant insignes isti Matheseos Professores et praesertim Herigonius, cuius eximiam doctrinam mihi summe commendavit D. Joannes de Beaugrand quem Deus beavit in caelo, quemque praepropera mors, maximo Scientiarum damno, nobis eripuit.(...) simulque rogo ut D. Herigonio meam in ipsum observantiam testari velit, ac nomine meo salutem dicere. (lettre du 23 novembre 1641, O.F. IV, pp.72-73; 80-81)

Un autre Italien s'adressa à Mersenne après avoir entendu parler du livre d'Hérigone:

> Erogo ut Reverentia vestra indicet mihi an reperiatur isthic aliquis liber in quo de algebra tractetur sed qui sit facillima et clarissima methodo adscriptus vel etiam in lingua gallica quam sufficienter calleo et praecipue me moneat uelim an aliquis isthic scripserit de algebra speciosa et Vietae idque clara ordinata methodo ad nos tam obscura quale Auctor Vieta scripsit. Mihi quidem audiuisse quod isthic adfuerit quidam uocatus (D.Henriqon) qui de algebra sicut de alijs Mathesis partibus scripsit plurima facilitate. (Giovanni Spinula à Mersenne, 30 juin 1647, [44] XV, p.267).

Et quand Hérigone mourut, un autre Italien présenta ses condoléances à Mersenne:

> Doleo quod Petrus Herigonius non vivat. Hinc quaeso a te, mi Mersenni, an mensurae et pondera ab illo relata <in> Arithmetica Practica cap. 2 sint iusta. (Cristoforo Sturani à Mersenne, 1 avril 1647, [44] XV, p.153)

Bien que ces lettres témoignent d'une, connaissance personnelle d'ailleurs probable entre Hérigone et Mersenne, le nom d'Hérigone n'apparaît pas sur la liste des habitués de la cellule de Mersenne établie par de Coste. Cependant, il ne faut pas oublier qu'Hérigone et le Minime avaient plusieurs intérêts communs. Hérigone publia une table des poids spécifiques (voir

[44] I, p.248; II, p.619), il résolut quelques problèmes en combinatoire (voir [44] II, p.619; V, p.138), en cinématique et statique ([44] III, p.304; V, p.158), sujets dans lesquels Mersenne avait aussi obtenu des résultats. Cela rend encore plus plausible l'hypothèse que des rencontres aient eu lieu entre les deux auteurs.

En outre, rappelons ce qu'Hérigone écrivit dans son catalogue des mathématiciens:

> Marinus Mersennus Religieux de l'ordre des Minimes, a bien enrichy la science de la Musique de beaucoup de belles choses qu'il met en ses escrits de la Musique theorique et practique, tant ancienne que moderne; et de la nature, causes, & effets des sons, consonances, dissonances, & d'autres choses appartenantes à l'harmonie. En son liure intitulé Harmonicorum instrumentorum lib.4 il a descrit et fait grauer les figures de tous les instrumens d'harmonie qui ont esté ou sont maintenant en vsage: lequel est en Latin & en François, mais le François est beaucoup plus ample que le Latin, & contient plusieurs choses rares de la Musique, et des autres parties des Mathematiques. Il a aussi beaucoup meslé de Mathematiques en tous ses autres liures, comme on peut voir en celui qu'il a fait sur la Genèse.

Pour ceux qui aiment les méthodes quantitatives, on pourra remarquer que cet article a 14 lignes et qu'il est donc le deuxième en longueur après l'article sur Viète (qui compte, pour sa part. 23 lignes), suivi par celui qui est consacré à Kepler (11 lignes), et par ceux sur Descartes ou Galileo (9 lignes chacun).

7. Hérigone et les mathématiciens de Paris

Hérigone jouit d'un prestige remarquable parmi les mathématiciens de Paris, ce qui lui permit d'être désigné par Richelieu comme membre de la commission pour juger de la méthode des longitudes de Jean Baptiste Morin.

Les autres commissaires étaient Jean Boulanger, professeur au Collège Royal[14], Etienne Pascal, Claude Mydorge et Jean de Beaugrand. Il s'agissait donc d'un groupe d'exception, composé des mathématiciens de Paris de tout premier plan et liés à la Cour. La commission fut constituée par un "dyplôme" du 6 Février 1634[15]. En plus de témoigner du prestige dont Hérigone jouissait à Paris, cela indique l'existence de rapports directs entre Hérigone et Beaugrand. D'ailleurs, il n'y a pas de doute à ce sujet: nous avons déja vu la lettre de Cavalieri à Mersenne dans laquelle il rappelle que Beaugrand lui a parlé très positivement d'Hérigone: "cuius eximiam doctrinam summe commendavit D. Jean de Beaugrand", probablement pendant le voyage de Beaugrand en Italie (Octobre 1635). Cependant, Hérigone ne parle pas de Beaugrand dans son Catalogue. Par contre, deux mathématiciens bien connus et cités dans le catalogue peuvent être considérés du même entourage que Hérigone: Claude Mydorge et Claude Hardy. On a déjà vu que Mydorge était commissaire aux longitudes avec Hérigone. Hérigone écrit de lui:

> Claudius Mydorgius Patricius Parisinus, en son livre intitulé Prodromus Catoptricorum & Dioptricorum, a bien augmenté et enrichy la science des sections coniques.

Il est raisonnable de supposer que Mydorge et Hérigone aient eu (ou du moins cherché) l'occasion de parler de la *méthode* de Fermat, puisque Mydorge, avec Hardy, joua le rôle d'arbitre dans la querelle

---

[14] Il fut professeur de mathématiques au Collège Royal de 1607 à 1636; voir Guillaume Du Val, [27]. Il est aussi mentionné dans la liste des fréquentateurs de la cellule de Mersenne donnée par De Coste.

[15] "Le 30 furent assemblés dans l'Arsenal, en présence du grand Prieur de Champagne les Sieurs Paschal, Midorge, Boulanger, Beaugrand & Erigone, fort versez ez Mathématiques, & les Sieurs de Beaulieu, de Cam, & Treille-bois, Capitaines de Marine, Commissaires députez par le Cardinal Duc, Grand Maistre & Surintendant du commerce, avec plusieurs autres personnes de marque: sur la proposition faite par le sieur Morin Professeur du Roy ez Mathématiques touchant le secret des longitudes, ci-devant par lui proposé en l'une des Conférences qui se font tous les Lundis au Bureau d'Adresse de cette ville, dont il fit la démonstration, au contentement de l'assistance. (voir E. Renaudot, [51], cité dans [88], p. 475.)

Descartes-Fermat au sujet de la *méthode* en 1638, et donc à l'époque où Hérigone était en train de préparer sa présentation de la *méthode*. L'associé de Mydorge, qui fut aussi arbitre entre Fermat et Descartes, est Claude Hardy, ainsi décrit par Hérigone dans le Catalogue:

> Claudius Hardy Conseiller du Roy au Chastelet de Paris, a très-bien traduit de Grec en Latin les Dates d'Euclide, dont nous avons suiuy la version.

Il faut remarquer que ces deux auteurs sont, avec Mersenne, Descartes et le "provincial" Gaspard Bachet[16], les seuls français contemporains inclus dans le Catalogue. Quant à la réputation d'Hérigone au delà des Alpes, rappelons que, par exemple, Cavalieri crut qu'Hérigone était membre du Collège Royal, et qu'il le cite parmi les plus célèbres mathématiciens de Paris dans sa lettre à Gianantonio Rocca du 28 août 1640:

> ... Beaugrand, Morin; vi è Pietro Herrigone, pur Matematico Regio, che ha fatto il ***Cursus Mathematicus***; Mersenne, Nicerone.... (voir [44] X,p.67)

Cependant, il y eut quelques raisons de querelle entre les Italiens et Hérigone: Hérigone, dans le ***Cursus***, avait proposé sa propre méthode pour la détermination des longitudes, basée sur l'observation des satellites de Jupiter. Puisque Galileo aussi avait proposé (mais sans la publier) une méthode fondée sur l'observation de ces satellites, Morin, devenu ennemi d'Hérigone[17] et Cavalieri affirmèrent qu'il s'agissait d'un plagiat:

---

[16] A propos duquel il écrit: "Claudius Gaspard Bachetus a commenté les six premiers livres de Diophante, & aussi celui qui traicte des nombres polygones."

[17] La Commission désignée par Richelieu décida, en effet, que la méthode de Morin n'était pas praticable. Tous les détails sont expliqués dans les pages citées de Boncompagni [88], dans Montucla [62], pp. 543-545, et plus récemment dans [22] I, p. 291. L'accusation de Morin est rappelée en [44] VI, p.246.

> Ho finalmente ricevuto una lettera di Francia dal Signor Giovanni de Beaugrand, lunga otto fogli, nella quale fa una gloriosa comemoratione di V.S. Ecc.ma, e dimostra quanto la stimi esso con tutti quei matematici di Parigi. Mi prega ch'io faci opera con lei ch'ella vogli, per benefittio universale, publicare la sua dottrina per le longitudini (tanto da loro desiderata, nonostante che l'Errigoni abbia voluto arrogarsi l'inventione) per via dei Pianeti Gioviali.

Le soupçon de plagiat obligea Elie Diodati[18] à rassurer Galileo qu'il n'avait pas trop parlé de sa découverte au cours d'une conversation avec Hérigone:

> Sebbene col R.P. Campanella e col Sig. Erigone avevo ragionato dell'invenzione di V.S. per le longitudini, e communicato loro le lettere che ne aveva scritte coll'occasione degli scritti che io gli mandai del Morino, non mi sono però dispensato di passar con loro, né con gli altri, più avanti, avendo tenuto (come era il dovere) il suo segreto segretissimo, essendo restato ristretto nel Sig. Grozio ed in me, essendosi compiaciuta di confidarcelo; di che mi è paruto doverla chiarire per liberarla da ogni dubbio contrario che potesse nascergli.... (Diodati a Galileo, 23 settembre 1636, O.G. XVI, p.491)

Pour compléter cet épisode je rappellerai la réponse d'Hérigone:

> Il est vray qu'environ un mois auparavant que mon dernier tome fust achevé d'estre imprimé, j'ouy dire que Galilée avoit trouvé les longitudes par les compagnons de Jupiter; mais il y a des personnes à Paris, dignes de foy, qui diront que je leur ay communiqué mon invention près de deux ans auparavant que je l'aye mis en lumière. (Ad ventilationem Morini responsio, dans ***Cursus***, t.V, p.860)

La réponse d'Hérigone est d'ailleurs plausible, puisque d'autres auteurs avaient proposé des méthodes pour les longitudes qui faisaient usage de la

---

[18] Elie Diodati, mort en 1642 à Paris, était "advocat en la Cour de Parlement" (De Waard). Mersenne le décrit "très curieux en miroirs et lunettes." ([44] I, p. XLIII)

position des satellites de Jupiter. Il n'y a pas d'autres documents publiés ou connus concernant la vie d'Hérigone.

8. Les oeuvres d'Hérigone

Il y a deux ouvrages connus d'Hérigone: ***Le cursus mathematicus*** et ***Les six premiers livres des éléments d'Euclide***. Le titre complet du premier est:

> Cvrsvs mathematicvs, nova brevi et clara methodo demonstratvs, Per notas reales et vniuersales, citra vsum cuiuscumque idiomatis intellectu faciles.//Covrs mathematique, demonstré d'une nouvelle, briefve et claire methode, Par Notes reelles & universelles, qui peuuent estre entendues facilement sans l'usage d'aucune langue[19]

celui du deuxième est:

> Les six premiers livres des elements d'Euclide, Demonstrez par Notes, d'vne methode tres brieve et intelligible. Avec les principales parties des Mathematiques, expliquées succinctement sans Notes. Et de plus un petit Dictionnnaire, contenant les etymologies & significations des noms & termes plus obscurs des Mathematiques.[20]

Ces deux titres sont très significatifs, et notre argument en tiendra compte. Mais il convient d'abord de situer les deux ouvrages dans leur genre.

[19]Par Pierre Hérigone, Mathématicien, A Paris MDCXXXIV. Chez l'Autheur, en l'Isle du Palais, à l'enseigne de l'Anguille & chez Henry le Gras, au troisième pilier de la grande Salle du Palais. Avec Privilège du Roy. Pour les variantes et les différentes éditions, voir [88].

[20]Chez Simon Piget, rüe S.Iacques, à l'enseigne de la Fontaine, 1644, avec privilège du roi.

D'après les connaissances, d'ailleurs fragmentaires, que nous possédons sur l'enseignement des mathématiques de l'époque qui précède immédiatement les publications d'Hérigone et sur le développement des manuels de mathématiques, on peut affirmer qu'il y avait quatre sortes principales de manuels consacrés aux sciences mathématiques:

1) les manuels les plus élémentaires, dont le titre est souvent "Les éléments d'Euclide", qui contiennent les principaux théorèmes d'Euclide, souvent sans démonstrations, mais avec des remarques explicatives ainsi que des éléments de la tradition médiévale d'arithmétique pratique et de géométrie pratique. Un exemple important pour l'histoire du livre est le ***Euclidis Elementorum libri XV***, préface de Stephanus Gracilis, traduction de Jean Magnien, dont la première édition est à Paris, en 1558, suivie de plusieurs autres, jusqu'en 1612, à Cologne. De plus en plus ce genre inclut de la théorie des fortifications et de l'art de la guerre. Davis associe ces publications aux milieux des académies du XVIème siècle français, en particulier aux jeunes aristocrates qui devaient se préparer à diriger les guerres[21]. Martin, qui s'occupe du XVIIe siécle, interprète ainsi cet épanouissement de l'enseignement des mathématiques "en liaison avec la réorganisation de l'armée royale à laquelle il fallait alors procéder".

2) les manuels que j'appellerais d'*universa mathematica*, parce qu'ils traitent des toutes les disciplines mathématiques. Leur titre est souvent ***Institutiones mathematicae***, et constituent des encyclopédies mathématiques. Ils contiennent généralement des éléments de philosophie mathématique tirés le plus souvent de Proclus, comprenant des discours élaborés sur la classification des sciences mathématiques; une présentation des sujets qui tient plus du glossaire des termes techniques que du manuel; en effet, le but de ce genre de manuel humaniste ne semble pas être celui d'enseigner des techniques,

[21] Voir Natalie Zemon Davis, [97].

mais plutôt de présenter la terminologie et les thèmes fondamentaux. Il s'agit typiquement d'ouvrages destinés aux collèges, écrits tantôt en grec, tantôt en latin, comme dans le cas des travaux de Dasypodius (***Volumen mathematicum primum et secundum*** 1567–1570; ***Dictionarium mathematicum*** 1573; ***Protheoria mathematica*** 1593; ***Institutionum mathematicarum erotemata*** 1593). Ainsi préparés à situer l'héritage classique dans un contexte systématique, les apprentis spécialistes pouvaient aborder les textes dans les éditions de Commandino.

3) les manuels "de sphaera" et de théorie des planètes qui, enracinés dans la tradition médiévale, étaient toutefois des véhicules de la nouvelle astronomie et des méthodes mathématiques;

4) le double genre des manuels d'arithmétique et algèbre pour les marchands et d'arithmétique et algèbre pour les étudiants des collèges. Comme exemple du premier type mentionnons ***L'Arithmétique*** d'Etienne de la Roche (Lyon 1520), et pour le deuxième les ***Elementa arithmeticae*** de Christian Wurstisen (1579). Clavius publia une série d'ouvrages qui rassemblent les différentes branches des mathématiques dans un traitement unificateur et de haut niveau. Chaque volume s'inscrit dans la tradition des manuels, selon le domaine mathématique traité. Hérigone, qui admirait beaucoup l'accomplissement de Clavius,[22] l'imita avec son ***Cursus*** tout en traitant quelques aspects pratiques négligés par Clavius – qui avait écrit pour les élèves des collèges de la Compagnie de Jésus – en même temps que des matières non géométriques du traité d'Euclide

[22] Hérigone écrit en effet dans son Catalogue des mathématiciens: "Christophorus Clavius Iesuiste, a escrit de la Sphere; de la Gnomonique; sur les Elem. d'Euclide; sur les Spheriques de Theodose; de la Trigonometrie; de l'Astrolabe; de l'Arithmétique practique; de l'Algebre vulgaire; et du Calendrier Gregorien, qui contient aussi les Apologies qu'il a fait contre Mestlin, I Scaliger, & autres. Nous avons suivy son ordre et texte aux Elem. d'Euclide; aux trois livres des Spheriques de Theodose; et aussi au 4 livre des Spheriques, iusques à la 38 propos." (*Cursus* t.VI, p.241).

Le *Cursus* contient:

Tome I – les quinze livres des Eléments d'Euclide (Clavius), les Données d'Euclide (Claude Hardy), la Section déterminée d'Apollonius (Snell), la Section de la proportion d'Apollonius (Snell), les Attouchements d'Apollonius (Viète–Ghetaldi), la doctrine de la section des angles (Viète). <Outre une présentations des principaux théorèmes avec des démonstrations reconstruites, ces textes sont commentés et enrichis par des références aux classiques (Pappus, Ptolémée, Theon) et aux traductions reconstructions et commentaires modernes (Viète, Snell)>.

Tome II – l'arithmétique pratique; le calcul ecclésiastique (calculs relatifs au calendrier liturgique); algèbre tant vulgaire que spécieuse avec la manière de composer et faire les démonstrations par le retour ou répétitions des vestiges de l'Analyse.

Tome III – Construction et usage des tables logarithmiques.La geométrie pratique: les fortifications, la milice et les méchaniques.

Tome IV – La doctrine de la sphère du monde: la géographie tant ancienne que moderne, désignée par degrez et minutes des longitudes et latitudes <il s'agit du volume connu sous le titre de *Cosmographie*>.

Tome V – Optique, Catoptrique, Dioptrique, Perspective, trois livres de la Sphérique de Théodose, avec le Traité de la mesure des triangles sphériques; la Théorie des planètes; la Gnomonique; la Musique. Réponse à l'examen du Sieur Morin <relation sur la querelle des longitudes avec Jean-Baptiste Morin>.

Tome VI – L'Isagoge de l'Algèbre. La méthode de mettre en perspective toute sorte d'objet par le moyen du compas

de proportion. La théorie des planètes, distinguée selon les hypothèses de la terre immobile et mobile (ici Hérigone présente les théories de Kepler). L'introduction en la Chronologie "avec une table des choses plus notables par ordre alphabétique: et un catalogue des meilleurs auteurs des mathématiques".

Les VI premiers livres des éléments d'Euclide contiennent la partie relative du tome premier du *Cursus*, un "brief traité" d'arithmétique pratique, un autre sur l'altimétrie, la géométrie pratique et les fortifications, un chapitre "De la gnomonique ou horologéographie", et une section consacrée à l'étymologie des termes mathématiques, tirés, encore une fois, tant des classiques que des modernes.

Quel était donc le but d'Hérigone dans son travail monumental? On peut commencer par les interprétations qu'en donnent les deux seuls textes contemporains sur Hérigone: l'article "Hérigone" dans Cajori[23], et celui dans [103][24]. Le premier affirme que:

> A full recognition of the importance of notation and an almost reckless eagerness to introduce an exhaustive set of symbols is exibited in the *Cursus mathematicus* of Pierre Hérigone.

Stromholm, à son tour, écrit à propos du *Cursus*:

> Its striking feature is the introduction of a complete system of mathematical and logical notation, very much in line with the seventeenth-century preoccupation with universal languages.

---

[23] Voir Florian Cajori, [91] I, pp.200.

[24] L'article est de Per Stromholm.

Je crois qu'il s'agit encore une fois de se rapprocher davantage du sens de son projet tel qu'envisagé par l'auteur lui-même. D'abord, on peut affirmer que l'ouvrage d'Hérigone appartient au même genre que celui de Clavius. On peut alors se demander quels sont les principales distinctions à faire entre l'ouvrage de Clavius et celui d'Hérigone. D'amblée on peut énumérer: les *notae*, la *langue*, l'*algèbre* de Viète.

au sujet des notae

Les deux titres d'Hérigone font référence à l'usage de notes: dans le cas du ***Cursus***, Hérigone écrit qu'il démontre par une méthode nouvelle, claire et facile par moyen de notes réelles et universelles, compréhensibles "sans l'usage d'aucune langue". Mais que sont les *notae*? En terminologie algébrique de l'époque, par exemple chez Fermat, *nota* signifie lettre symbolique (**A**, **E**, comme inconnues, **B**, **C** comme coefficients). D'ailleurs, on a pu voir dans la procédure d'Hérigone que l'un des passages consiste à "mettre en notes" dans ce même sens. On pourrait donc s'attendre à un traitement algébrique des différents domaines des mathématiques. Il semble, en effet, qu'Hérigone ait eu à l'esprit ce projet général: nous avons vu que son ouvrage ***Les six premiers livres*** contient les ***Eléments***

> ...démonstrés par notes d'une méthode trés briève et intelligible avec les principales parties des mathématiques expliquées succinctement sans notes....

et c'est donc dans le traitement d'Euclide que nous devons chercher les *notae*. Or, le texte d'Euclide présenté par Hérigone n'est pas du tout une "géométrie algébrique", du moins selon nos critères actuels d'algébrisation[25]. Il est vrai qu'Hérigone souligne la signification numérique et parfois algébrique des théorèmes, selon la tradition du XVIe siècle, comme pour le théorème d'Euclide IX,8. Mais ce qui rend originale

---

[25] Voir à ce propos les trois critères proposés par Mahoney, [114].

sa présentation est plutôt la façon que j'appellerais syncopée (par analogie avec l'attribut de l'algèbre de Cardan, par exemple) d'écrire les mathématiques. Hérigone introduit une grande quantité de symboles et d'abréviations, en en distinguant deux espèces: les notes et les citations. D'après les listes données au début du deuxième tome, les notes comprennent les symboles et les abréviations du langage mathématique, comme le signe moins , celui du rapport, ainsi que les abréviations magd. pour *magnitudo*, req. pour *requisitus* etc.; les citations par contre incluent par exemple hyp. pour *hypothesis*, suppos. pour *suppositio*, etc.

En nos termes, Hérigone n'eut donc pas seulement le mérite d'introduire pour les mathématiques un langage artificiel qui incorporait l'algèbre symbolique, mais surtout de distinguer deux langages, que nous appellerions le langage mathématique et un métalangage. De plus, toutes les démonstrations du ***Cursus*** se déroulent selon ce schéma d'explicitation: d'un côté (à droite) le théorème, dans un langage mixte, symbolique et syncopé, et de l'autre côté (à gauche), les présupposés théoriques ou références, ainsi que la terminologie de Viète pour les opérations de la théorie des équations, ou les métatermes classiques, comme *analysis*, *definitio*, *scholium*.

Ces éléments du style d'Hérigone devraient suffire à qualifier historiquement et critiquement toute interprétation du ***Cursus*** en termes de "logique", au moins au sens de logique comme système. Hérigone ne cherchait pas à expliciter les *règles* du raisonnement. Ce qu'il cherchait avant tout à expliciter étaientt les *présupposés* des théorèmes, donc on peut plutôt voir dans le style du ***Cursus*** une *art de penser*. D'abord, il s'agissait des fondements *euclidiens*, c'est-à-dire ceux qui étaient invoqués dans les démonstrations des théorèmes d'Euclide. Mais, il ne suivait la tradition humaniste des manuels d'Euclide[26], dont le but était de reconstruire les raisonnements euclidiens en syllogismes. Car la structure du raisonnement ainsi mise en évidence n'est pas celle de syllogisme. Ensuite, il s'agissait de conventions introduite par Hérigone lui-même, comme la notation ou des définitions secondaires. D'autre part, Hérigone prenait au sérieux la

[26]Un exemple célèbre est celui de Dasypodius qui publia avec son professeur, Herlinus [16], une version syllogistique d'Euclide.

distinction analyse-synthése longuement étudiée par les humanistes et "restaurée" par Viète. Comme chez Viète, l'algèbre avait trouvé son fondement dans l'analyse grecque. Ainsi la géométrie trouvait-elle une méthode ou une forme optimale de présentation dans la logistique "spécieuse". Cependant, de la logistique "spécieuse" Hérigone ne tira pas de *calcul* littéral (la logistique était en effet, depuis les grecs, le calcul des quatre opérations), mais seulement un usage des lettres, comme de l'algèbre cossique il avait tiré la langue syncopée. La langue syncopée, le projet unficateur (étendu à l'***Universa mathematica***) et la confiance dans l'universalité linguistique du texte suggèrent qu'Hérigone envisageait des possibilités encore inexplorées de la logistique "spécieuse", par-delà son origine arithmétique et cossique et même l'analyse de Viète, car dans le ***Cursus*** l'algèbre est conçue et employée comme méthode des sciences mathématiques. Si la logistique "spécieuse" est entrée dans l'analyse de Viète comme outil de la "Zététique" (part de l'analyse[27]), avec Hérigone elle devient aussi outil de synthèse en tant que partie d'une méthode de démonstration. Le dessein d'Hérigone est donc de présenter les mathématiques comme un tout où la logistique spécieuse est un outil universel (à l'intérieur de l'***Universa mathematica***).

au sujet de la langue

Beaucoup de spécialistes ont étudié les raisons qui ont porté les auteurs des XVIe et XVIIe siècles à choisir le latin ou la langue vulgaire. On dispose par ailleurs de peu d'études des manuels scientifiques de

[27]Après sa redéfinition des parties de l'analyse, Viète, au début de son Isagoge, écrivit: "La forme pour commencer la Zététique <expression de l'énoncé en équation> est par l'art propre: non pas en exercant sa Logique par les nombres, qui est la cause du peu de fruit que l'on tire des Analytiques des Anciens; mais bien par le Logistique Soubs des espèces nouvellement trouvées..." (trad. Vaulezard, p.14)

l'époque[28] qui, bien entendu, étaient presque toujours écrits en latin. Ici, c'est le genre qui était sans doute déterminant: par exemple, les *Arithmétiques* commerciales tendaient à être écrites en langue vulgaire, de même que les traités d'art militaire, tandis que les manuels d'astronomie étaient en latin. Dans le cas d'Hérigone, il est toutefois légitime de se demander jusqu'à quel point le choix de la langue faisait partie du dessein de l'ouvrage[29]. Le fait de proposer un manuel comme le ***Cursus*** *"e regione"*, c'est-à-dire avec textes en regard était en effet très original sinon unique, bien que l'on trouve plusieurs auteurs publiant deux versions d'un même ouvrage. La question posée par le bilinguisme du ***Cursus*** est s'il s'agit d'un texte latin traduit en français ou vice-versa, c'est-à-dire, si c'est le latin ou le français qui, ajouté à l'autre version, doit contribuer à rendre plus universel l'ouvrage. La réponse immédiate est que, le genre de ***Cursus*** ayant commandé jusque là l'usage du latin, c'est la version française qui constitue l'innovation. En effet, la tendance de l'époque était justement d'étendre le langage de la langue vulgaire aux manuels pour rencontrer les besoins de ceux qui n'étaient pas versés en latin, notamment et surtout des jeunes nobles[30]. D'autre part, il est vrai aussi que les témoignages des lecteurs du ***Cursus*** font comprendre qu'il jouit d'un plus grand succès en Italie et en Angleterre, justement à cause de sa version latine. Un autre problème du ***Cursus*** qu'il faut considérer par rapport à la langue est que, à l'époque, on n'était pas encore parvenu à uniformiser les traductions de Viète: la langue vulgaire était donc un obstacle à la fidélité à Viète. Par contre, c'était un lieu commun que l'algèbre de Viète n'était pas facile à comprendre dans la représentation qu'il lui avait donnée. Quand à la

[28]Il faut pourtant consulter les textes désormais "classiques": le déjà cité H.J. Martin [117]; J.C. Margolin, [115]; E. Eisenstein, [100]; et M. Chrisman, [92].

[29] Il s'agit en effet ici de l'autre aspect de l'universalité: le premier, c'était la référence à l'***Universa mathematica*** avec la même méthode; le deuxième, c'est la langue universelle telle qu'elle est évoquée dans le titre du ***Cursus***: "par notes réelles et universelles qui peuvent être entendues facilement sans l'usage d'aucune langue".

[30]Voir à ce propos H.J. Martin. [117], pp. 249-252.

traduction française, Hérigone suivit de près celle donnée par A. Vasset[31]. N. Durret publia en 1644 une autre traduction de Viète qui confirme la même terminologie. Par exemple, Vasset, Hérigone et Durret traduisent "logistica speciosa" par "logistique spécieuse", tandis que Vaulezard écrit "logistique spécifique", et donne un argument pour cela contre le choix de Vasset[32]. En conclusion je crois que, pour le ***Cursus***, le traitement de l'algèbre a bénéficié de la comparaison avec le texte latin. Le latin était en effet la langue de l'algèbre syncopée ainsi que de l'art analytique de Viète et la terminologie française dans ces sujets était loin d'être stable.

au sujet de l'algèbre

Avec le ***Cursus***, l'algèbre de Viète est littéralement canonisée. Toutes les sections du ***Cursus*** sont mises à jour des développement les plus récents mais le traitement de l'algèbre, étalé entre le deuxième et le sixième tome, joue un rôle particulier dans l'économie de l'ouvrage. On a des remarques d'Hérigone qui justifient ce rôle dans l'article sur Viète du ***Catalogue*** ainsi que dans la préface à la section "algèbre".
Hérigone écrit dans le "Catalogue":

> Francescus Vieta a mis en lumière les livres intitulez Canon Mathematicus, Calendarium, Pseudomesolabum, Munimen adversus novam cyclometricam, Apollonius Gallus, Opus restituta Mathematica Analyseos, sive Algebra nova, qui contient l'Isagoge; cinq livres des Zététiques, les effections géométriques, les résolutions des puissances tant affectées que pures, le supplément de géométrie, le 8 livre Variorum

[31]En 1630, deux auteurs parisiens publièrent une traduction de l'***Isagoge*** de Viète (avec un choix d'autres écrits); Antoine Vasset [57], Jean-Louis Vaulezard [58]. Plus tard, Noël Durret (1590-1650 ca) publia [26] par N. Durret, cosmographe ordinaire du Roy, Paris 1644.

[32]Vaulezard publia un ***Examen de la traduction faicte par Antoine Vasset*** en 1631, qui est présent dans un exemplaire de Vaulezard à la Bibliothèque Nationale, mais n'a pas été reproduit par Armogathe en 1986.

de rebus mathematica responsorum. De ses oeuvres, depuis son déceds, on a mis en lumière, ad logisticen speciosam notae priores, les traictez de recognicione et emendatione aequationum, et les démonstrations des théorèmes des sections des angles qu'il avoit fait imprimer en son 8 livre des Responses. Il est le premier qui a observé qu'une équation d'algèbre peut avoir plus de deux solutions, et d'autant plus que l'équation monte haut. Il est aussi inventeur de la méthode universelle d'extraire les racines des nombres des puissances affectées, et le premier qui a introduit en l'Algèbre la loy des homogènes; et est aussi le restaurateur, ou plustost autheur de l'Art Analytique, qui est maintenant en usage, par le moyen des espèces ou lettres de l'alphabet, au respect duquel, l'Analyse qui n'use point d'espèces est plustost une faculté, qui s'acquiert par un long exercice, et bonté d'esprit et de mémoire, qu'un art. (*Cursus*, t. VI, p.240)

Les dernières remarques illustrent bien comment Hérigone théorisait la portée de la contribution de Viète en algèbre et aussi jusqu'à quel point l'introduction des lettres et la théorie des équations devançait en importance l'art analytique comme programme de géométrie analytique. D'autre part, au début de la section du *Cursus* consacrée à l'algèbre, Hérigone écrivait:

La doctrine analytique, ou l'algèbre, est l'art de trouver la grandeur incognüe en la prenant comme si elle estoit cognüe, et trouvant l'égalité entre icelle et les grandeurs données[33]. Elle se distingue en la vulgaire et en la spécieuse[34].

L'algèbre vulgaire ou nombreuse est celle qui se pratique par nombres. L'algèbre spécieuse est celle qui exerce sa logique par les expèces ou formes des choses désignées par les lettres de l'alphabet. L'algèbre vulgaire sert seulement à trouver les solutions des problêmes Arithmétques sans démonstrations. Mais l'algèbre spécieuse n'est pas limitée par aucun genre de problême, et n'est pas moins utile à toute

[33]Il s'agit de la définition d'équation introduite par Viète et, par extension, appliquée à l'algèbre.

[34]Le texte latin est: "Distinguitur in vulgarem sive numerosam, et Vietaeam sive speciosa".

sorte de théorèmes, qu'à trouver les solutions et démonstrations des problêmes. (*Cursus*, t. II, Algèbre, p.3)

Je crois que ce passage peut justifier à lui seul le projet d'un ouvrage comme le ***Cursus*** et représente bien l'attente suscitée par l'algèbre de Viète. Il est clair aussi que ce texte (de 1634) fut écrit avant que la géométrie ne commençat à constituer le développements le plus intéressant du programme de Viète. Mais, déjà, des remarques de l'***Isagoge de l'algèbre*** (1642) témoigne de la lecture du texte de Descartes par Hérigone:

Monsieur Descartes, qui sçait de l'Algèbre si bien, qu'on ne peut nier, qu'il n'aye trouvé la solution du fastueux problême des problêmes, RESOUDRE TOUT PROBLEME, en sa géométrie, il fait cette division.... (*Cursus*, t.VI, p.58)

En attribuant ce rôle à l'algèbre, le ***Cursus*** bouleverse l'ordre du quadrivium, comme l'expliquait Hérigone dans sa préface au deuxième tome: l'arithmétique est en deuxième position par rapport à la géométrie, essentiellement parce que son objet ne peut se comprendre qu'en connaissant Euclide et l'algèbre arrive à la fin parce qu'elle est fondamentale pour tout ce qui la précède. (Tome II, p.2)

Sans entrer ici dans les détails de cette classification des sciences, il faut remarquer que la fortune du ***Cursus***[35] fut liée en grande partie à son contenu algébrique. Le premier témoignage en ce sens est celui de Debeaune qui écrivit dans sa lettre du 26 février 1639 à Mersenne:

[35]La diffusion proprement dite du *Cursus* est une question que j'ai seulement abordée. H.J. Martin cite une bibliothèque privée où au moins la *Cosmographie* d'Hérigone, c'est à dire son tome IV, est conservée. Il s'agit de la bibliothèque de Voiture, mort en 1648, (voir H.J. Martin, [117], p.534, ainsi que les renseignements à la page 524). J'ai constaté, en outre, que l'exemplaire du *Cursus* conservée à la Bibliothèque de l'Arsenal appartenait à un couvent de Capucins, et que la copie incomplète (le seul premier tome) de l'édition de 1634, présente à la Mazarine, indique comme possesseur le monastère des Blancs Manteaux. Par contre, la copie complête de la Mazarine, de l'édition de 1644, appartenait déjà au collège des Quatres Nations, puisque la côte et le titre figurent dans l'inventaire le plus ancien. Ce que j'affirme ici se fonde donc sur les témoignages cités.

... Je vous advoue que j'aye beaucoup apris de ceste géométrie de Mr. Descartes et que je ne sçavois que ce j'avois apris de l'algèbre d'Hérigone.([44], pp. 531–533)

Notons que Florimond Debeaune fut probablement le principal auteur à adopter la notation d'Hérigone et précisément celle des exposants[36]. J'ai déjà cité la lettre de Mersenne à Haack dans laquelle il mentionne Hérigone ainsi que Viète et Clavius[37]. On a vu aussi la lettre du 30 juin 1647 de Spinula, dans laquelle il demande à Mersenne de lui recommander une introduction à l'algèbre et rappelle avoir entendu parler du ***Cursus***[38].

Parallèlement, deux Anglais en "visite" sur le continent s'échangèrent des propos très importants pour notre sujet. Vers la fin septembre, début octobre 1644, Charles Cavendish écrivit de Hambourg à John Pell (Amsterdam):

Worthie Sir, manie thanks for yours of the 7/17 of september. I am sorie for Beaugrand and Herigon's deathes. I hope it will take you more seriouslie thinke of polishing and publishing your former thoughts of

[36]Que la notation du *Cursus* n'ait pas rencontré une grande faveur est attesté entre autre par la lettre du 21 septembre 1641 d'Antonio Santini à Galileo, [44] X, p. 752: "... Di Parigi fu alquanto tempo fa participato quel suo *Cursus Mathematicus* capriccioso nel methodo, che v. s. poi mando al P. Cavalerio. E' poi venuta l'opera compiuta, e si vede quanto ogni giorno si vadano affinando gli intendimenti."

[37]Il s'agit de la lettre de Mersenne à Haack, datèe par l'éditeur du premier novembre 1639, vrai document de bibliographie scientifique de l'époque, dont j'ai cité la partie concernant en particulier Hérigone et Morin comme indication de l'opinion de Mersenne à propos d'Hérigone. Elle est publiée en [44] VIII, pp.579–584.

[38]Il s'agit de la lettre du 30 juin 1647 de Giovanni Spinula à Mersenne, dont j'ai cité une partie dans le paragraphe sur Mersenne. La phrase suivante est aussi significative pour nous: "Rursus moneat me velim an sit nunc Parisiis vel etiam in Gallia aliquis mathematicus qui de algebra omni tum antiqua tum nova scilicet speciosa sciat profunde et calleat docere artem. Ego enim qui sum avidissimus istius artis cum illo libentissime communicabo dubitationes." Que Spinula ait entendu parler du *Cursus* n'est pas surprenant puisque Galilée en avait reçu une copie et en avait ensuite fait cadeau à Cavalieri. C'est ce qu'affirme, entre autres, comme on l'a vu, Antonio Santini dans sa lettre du 21 septembre 1641 à Galilée.

analytics. I never sawe Herigon's 6th tome, nore thinke his 5th; yet somewhat of algebra in those tomes have, but nothing neuve, as I remember, or very little. (voir [44] XIII, p.227)

Cavendish trouva enfin le moyen de lire le sixième tome, puisque le 10 mars 1646, il écrivit:

I give you many thanks for your letter wherein I received so full an explanation of what I desired in Herigon that I more wonder I founde it not my self. I never sawe a demonstration of Mons: Fermat method de *Maximis et minimis*, there are examples of it in Herigons Supplem Algeb: from page 59 to page 69. If the demonstration be not longe you shall doe me a greate favoure to demonstrate it and send it me. (Cavendish, Paris, à Pell, Amsterdam [44] XIV, p.122)

John Pell répondit d'Amsterdam le 2 avril 1646:

I had tought to have sent you Herigon's examples de Maximis et Minimis wrought after my fashion. But of this be assured, yt Monsr. Fermat hath given no perfect rule for ye inquiry ([44] XIV, p.194)

Ces témoignages nous amènent à tirer deux conclusions. Le ***Cursus*** eut une certaine diffusion comme introduction à ce qui était probablement le sujet mathématique où la demande d'introduction était la plus forte, c'est-à-dire l'algèbre de Viète. Cela fut probablement perçu par Hérigone lui-même qui conçut le supplément (tome VI) surtout comme un supplément d'algèbre. On peut donc corriger l'affirmation précédente selon laquelle le modèle d'Hérigone était Clavius en précisant que c'était Clavius quant à la variété des sujets traités, mais que le ***Cursus*** doit plutôt être rapproché, quant au contenu et à l'approche générale, des manuels d'algèbre de l'époque, comme ***The pathway to knowledge*** de John Tapp (Londres 1613), ou l'ouvrage de Oughtred[39], ou, avec plus de ressemblances, avec le texte

[39]Il s'agit de [46], réimprimée dix fois, jusqu'en 1792.

d'algèbre d'Henrion [34] de 1620[40] et il fut dépassé par le texte de Jacques de Billy [9]. Mais comme manuel d'algèbre il restait très élémentaire, et servit seulement aux premières générations d'algébristes: c'est pourquoi sa renommée est due plutôt au caractère encyclopédique et au langage universel. Ainsi le rappelle D'Alembert dans l'***Encyclopédie***:

> Après avoir exposé ce qui concerne le *élémens* des sciences en général, nous allons maintenant dire un mot des *élémens* de Mathématiques et de Physique, en indiquant, pour répondre à l'objet de cet ouvrage, les principaux livres où ils sont traités.
>
> Le premier ouvrage de cette espece est celui de Hérigone, publié en latin et en francois l'an 1664 (sic), en dix volumes(sic). Cet auteur y a renfermé les *élémens* d'Euclide, les données du même, &c. avec les *élémens* d'Arithmétique, d'Algébre, de Trigonométrie, d'Architecture, de Géographie, de Navigation, d'Optique, des Sphériques, d'Astronomie, de Musique, de Perspective &c. Cet ouvrage a cela de remarquable, que l'auteur y emploie par-tout une espece de caractere universel, de maniere que sans se servir absolument d'aucun langage, on peut en entendre toutes les démonstrations, pourvu que l'on se souvienne seulement des caractères qui y sont employés. (Tome V, 497a)

Quant aux procédures de Fermat, elles trouvèrent dans le ***Cursus*** le lieu le mieux choisi pour être interprétées comme une seule méthode au sens le plus vaste: le ***Cursus*** proposait une méthode de présentation des différents sujets des mathématiques inspirée du programme analytique de Viète. Plus particulièrement, les procédures de Fermat entraient dans le ***Cursus*** après des résultats en théorie des équations introduits par Descartes dans sa

[40]D'ailleurs, le Catalogue des Livres Imprimés de la Bibliothèque Nationale et le National Union Catalog Pre-1956 Imprints indiques Henrion comme l'auteur du vol. VI ou ***Supplément de l'algèbre*** du ***Cursus***, avec le pseudonyme de Cyriaque de Mangin. Mais le ***Traicté d'algèbre***, Paris 1620 n'a pas du tout le style du ***Cursus***, tout en étant une première vulgarisation de la ***logistica speciosa***.

géométrie[41]. Comme Descartes avait résolu le "problême des problêmes", Fermat avait trouvé une technique uniforme pour résoudre des problêmes qui avaient été considérés très difficiles, résolubles par cas, ou même sans relation entre eux. Or la méthode, en mathématique, s'identifie, chez Hérigone, avec la formulation, la résolution et la démonstration générale, à la manière de Viète et à sa suite. Viète avait transformé une faculté en un art, ses disciples ont fait d'une doctrine une théorie mathématique.

[41]Dans le contexte desquels Hérigone écrivit le passage cité sur "le problême des problêmes". Je citerai ici l'article sur Descartes du ***Catalogue*** d'Hérigone: "René Descartes, au livre qu'il a intitulé ***De la Méthode***, explique la Dioptrique & les Météores, par le moyen de nouveaux principes qu'il suppose; et en sa géométrie il a trouvé, par le moyen de l'algèbre, la solution du problême d'Apolonius Pergeus, dont Pappus fait mention au 7 livre, qui s'appelle, ***Locus ad tres, quatuor vel plures lineas***. Il a aussi enseignè à résoudre, par le moyen des secteurs coniques, les équations de l'algèbre, qui montent au 3 et 4 degré parodique."

CHAPITRE V

APRES LA DIFFUSION: LA TRADITION DE LA METHODE DE FERMAT

Avec la publication du supplément au ***Cursus mathematicus***, la *méthode* de Fermat acquit sa forme canonique, car c'est dans cette forme que la plupart des mathématiciens la connurent. Nous avons déjà vu comment Charles Cavendish et John Pell, respectivement à Paris et à Amsterdam, se communiquèrent le résultat de Fermat par moyen de la présentation d'Hérigone, et ce fut Pell qui envoya le texte à Cavendish. Il faut remarquer, à ce propos, que Cavendish était très proche de Hobbes à l'époque, ce qui nous donne un indice du fait que Hobbes, outre à posséder la version de Beaugrand, connaissait la version d'Hérigone.

Si cela nous indique au moins quelques canaux de diffusion de la *méthode* de Fermat en Grande Bretagne (et particulièrement dans la version d'Hérigone), ce renseignement souligne aussi le rôle de premier plan des savants hollandais dans cette diffusion. Nous allons avant tout examiner ici les contributions dans ce sens de Frans van Schooten et Christiaan Huygens, suivant l'ordre chronologique.

1. Van Schooten 1643

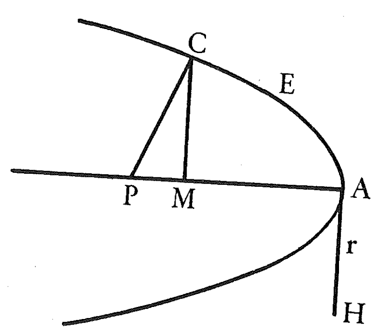
D'abord, nous savons d'après les cahiers qui résument les sujets traités dans les cours de Van Schooten à Huygens[1], que Frans van Schooten enseigna à Huygens la *méthode* de Fermat dans la version d'Hérigone. En

---

[1]Il s'agit du MS 12 du ***Codex Hugeniorum*** conservé à Leyde. Le MS est intitulé ***Algebra***, et Van Schooten a écrit les pages 1-130 et 282-348, tandis que Huygens a écrit les pages centrales (j'ai tiré ces renseignements de l'ouvrage de Alfonsina D'Elia, [99].

effet, aux pages 284-287 du MS, on trouve le paragraphe ***De Maximis et Minimis sive Ratio inveniendi casum determinationis in Problemate determinato iuxta Methodum Domini de Fermat***, de la main de van Schooten lui-même. D'après la description donnée par l'éditeur du volume XI des Oeuvres complètes de Huygens (dorénavant, [37], pp.19-20), van Schooten, dans ce manuscrit, se borna à écrire la version d'Hérigone, avec pourtant une innovation importante: les symboles **x** et **y** à la place des **a** et **e** employés par Hérigone. Ainsi, suivant Hérigone au point de vue opérationnel, il pose explicitement y=0. En outre, Van Schooten donne ici quatre exemples d'application de la règle, dont un est celui de l'*Analytica*, un deuxième est d'Hérigone (***Trouver le plus grand rectangle compris sous la moyenne, et la différence des extrêmes de trois lignes proportionnelles***) et les deux autres sont de van Schooten lui-même, c'est-à-dire:

> Etant données deux droites incidentes AB et CB en position, et le point D à l'intérieur de l'angle compris entre elles, il faut tracer par D la droite ADC de façon que le triangle ABC soit minimum.
> Etant donnée la parabole CE, et le point P sur son axe, il faut tracer par P la droite PC telle qu'elle soit la plus petite que l'on puisse tracer du point P à la parabole. ([37] XI, p.19)



Ce dernier problème est particulièrement intéressant, si l'on y reconnaît quelques aspects de la détermination de la normale, traitée par Fermat lui-même dans ***Méthode expliquée***. Bien entendu, ici le point de tangence n'est pas donné, et par contre le point de l'axe est donné. Mais on ne peut pas s'empêcher de voir ici une écho de la dispute entre Descartes et Fermat sur l'interprétation de la tangente comme un maximum ou un minimum, et sans doute van Schooten avait-il été mis au courant de cette dispute: d'où, en effet, tirait-il son savoir en algèbre de Viète et *méthode* de Fermat? Bien entendu, avant tout de son père (qui portait le même prénom), qui avait succédé à l'algébriste van Ceulen dans l'enseignement des mathématiques à Leyde[2]: ainsi il avait connu la tradition algébrique allemande et hollandaise. Mais il séjourna à Paris, en contact avec Mersenne, de 1637 à 1643, où il put "assister" à la dispute épistolaire entre Fermat et Descartes de janvier à octobre 1638. Nous savons que ce séjour le mit au courant des travaux de Viète et de Fermat et qu'il les trouva passionnants, puisqu'il retourna de Paris avec, outre les manuscrits de Viète, quelques copies des manuscrits de Fermat. En effet, s'il réussit à faire paraître sa célèbre édition des manuscrits de Viète, il essaya sans succès, peut-être à cause du jugement négatif de Descartes, de convaincre Elzevier de publier les manuscrits de Fermat[3]. En ce qui concerne Descartes, van Schooten le rencontra à Leyde en 1637, et put lire ainsi les épreuves de la ***Géométrie***. Ce fut même par Descartes que Schooten fut introduit au cercle de Mersenne pendant son séjour à Paris.

Si donc deux ans après, en 1643, van Schooten introduisit l'usage du symbole **y** dans la présentation de la *méthode* de Fermat, cela doit dépendre de son étude de la ***Géométrie***, ce qui indique la possibilité d'une contamination conceptuelle, outre que notationnelle, entre la "géométrie analytique" de Fermat et celle de Descartes. Et en effet, on peut voir que le dessin de van Schooten ([37] XI, p.19) a beaucoup d'affinité avec les

---

[2]Pour beaucoup de renseignement sur Frans van Schooten, voir le correspondant article dans Gillispie [103], de J.E.Hofmann.

[3]Je tire ces informations, très importantes, de l'article de Hofmann cité.

dessins par lesquels Descartes illustre les problèmes de détermination de normale (par exemple, à la page 350 de la ***Géométrie***, malgré l'usage de la sécante, absente chez van Schooten), et l'on peut se demander si van Schooten, plutôt que d'expliquer simplement la méthode de Fermat, avait l'intention de rendre plus facile à son élève Huygens la tâche de comparer les méthodes de Descartes et de Fermat.[4]

Quoi qu'il en soit, cette version de la *méthode* de Fermat, qui suit la structure de celle d'Hérigone et emploie une notation cartésienne, eut une grande fortune: Huygens l'adopta, et grâce aux présentations de Huygens et à la ***Geometria*** de van Schooten, elle répandit la *méthode* de Fermat à travers les siècles. Cela nous fait corriger quelque peu l'affirmation du début de ce chapitre: la *méthode* de Fermat reçut, avec la présentation d'Hérigone, sa forme canonique, mais seulement à des modifications notationnelles près, adoptées d'ailleurs sans le déclarer explicitement: d'après van Schooten, il s'agissait tout simplement de la *méthode* "Domini de Fermat".

2. Huygens, de 1646 à 1652

Si entre 1645 et 1647 van Schooten proposait à Huygens cette version d'Hérigone corrigée seulement en ce qui concerne la notation, de mars 1647 à août 1649 Huygens reçut l'enseignement mathématique de John Pell à Breda, ce qui sans doute le confirma dans sa connaissance de la *méthode* de Fermat et probablement dans la version d'Hérigone puisque, comme on l'a vu, Pell la connaissait ainsi. Ce que nous pouvons remarquer de ses écrits est qu'il commença à l'appliquer à beaucoup de problèmes de maxima et minima. Nous pourrions voir cette première phase de son activité comme une période d'expérimentation de la *méthode* de Fermat, car ce fut ainsi qu'il développa sa propre version de la *méthode* de maxima et minima, tout en restant le principal "spécialiste" de la *méthode* de Fermat.

---

[4]Il faut dire, cependant, que l'usage des x et y correspond ici plus à l'esprit qu'à la lettre de la notation de Descartes.

Je trouve assez surprenant que l'histoire de la tradition Fermat-Van Schooten-Huygens par rapport à la *méthode* n'ait pas encore été racontée, et dans les limites de ce travail je ne ne peux que l'ébaucher. Il est probable que, encore une fois, l'ombre de Descartes ait couvert le sujet, étant données les relations de Van Schooten ainsi que de Huygens avec Descartes. Mais je crois qu'il serait important de commencer à voir[5] Huygens comme l'héritier de Fermat. Cela est au moins très frappant en ce qui concerne la *méthode*. En effet, il eut le double rôle de diffuser la *méthode* de Fermat et de la développer, tout en gardant l'approche générale substantiellement fidèle au point de vue de Fermat et, d'autre part, de l'adapter à la nouvelle génération de mathématiques. J'ai compté dix pièces de Huygens concernant la *méthode* , sans inclure celles qui en font usage en passant[6].

---

[5]Il est vrai que M. Mahoney a évoqué quelques aspects de cette tradition, particulièrement dans l'épilogue de son livre, où on trouve aussi l'indication de la "généalogie" Fermat-Van Schooten-Huygens-Leibniz,([82] p.350).

[6]Christian Huygens écrivit plusieurs pièces reliées à la *méthode* ou spécifiquement consacrées au sujet de la méthode de maxima et minima de Fermat:

1) la pièce de 164 concernant sept problèmes de maxima et minima résolus par la méthode de Fermat ([37] XI, pp.46-49)
2) la pièce de 1650 sur le problème fondamental du ***De locis planis*** de Fermat ([37] XI, pp.229-234)
3) la pièce du 14 février 1652, qui contient un cas de minimum traité à la manière de Fermat ([37] XII, pp.38-41)
4) la pièce du 15 septembre 1652 ***Ostenditur quae ratio sit regulae Fermattij, cujus exempla inferius à Schotenio asscripta sunt, dein alia docetur brevior***, ([37] XII, pp.60-68)
5)la pièce de 1653 contenant quelques déterminations de tangentes, par les méthodes de Descartes, de Fermat et les deux combinées ([37] XII, pp.76-80)
6) plusieurs recherches de 1657, concernant surtout les propriétés de nouvelles courbes, incluant leur tangentes ([37] XIV, pp.297-304)
7) une contribution aux commentaires à la ***Géométrie*** inclus dans ***Geometria*** de van Schooten ([37] XII, pp.418)
8) la pièce du printemps 1667 ***Demonstratio regulae de maximis et minimis*** ([37] XX, pp.229-241)
9) la pièce du 13 avril 1667 ***Regula ad inveniendas tangentes linearum curvarum*** ([37] XX, pp.243-255).
10) la lettre à Oldenburg du 27 septembre 1672 VII, p.249.

Nous voyons les premiers résultats de cette réélaboration dans une pièce de 1646, donc de la période où il étudiait avec Van Schooten. Huygens résoud sept problèmes de maxima et minima, anciens et modernes, et simplifie pour la première fois la *méthode* de Fermat de la manière qui sera présentée par Van Schooten dans sa ***Geometria***. Il écrit en effet:

> L'on doit effacer les termes qui ne contiennent pas y, ainsi que les termes qui contiennent y plus qu'une fois [dans une puissance supérieure à la première], et le reste sera posé égal à zéro.[7]

Nous verrons plus loin que cette "simplification" fut ensuite adoptée comme variante de la *méthode* de Fermat, et porta comme telle le nom de Huygens.

Un autre pièce, de 1650[8], documente le travail de Huygens sur sa reconstruction de ***De locis planis*** d'Apollonius. Ce travail ne dépend pas de celui de Fermat, et nous savons même que Huygens insista de ne pas être mis au courant de l'ouvrage de Fermat[9]; cependant, ce qui nous intéresse ici est que Huygens suivit en effet la démarche de Fermat sans la connaître. De plus, Huygens inclut une détermination de minimum, à résoudre par la *méthode*.

L'an 1652 est très important dans la réélaboration de la *méthode* de la part de Huygens parce que, après avoir ultérieurement travaillé sur de nombreux problèmes de maxima et minima, ou plutôt après avoir transformé en problèmes d'extrêma quelques problèmes qui comportaient des *determinationes* (c'est-à-dire, des diorismoi ou conditions limites)[10],

[7] "Deleantur hinc quae non habent y et quae habent plus quam unam y, et reliquum erit = 0." ([37] XI, p.48)

[8] Voir [37] XI, pp.229-234.

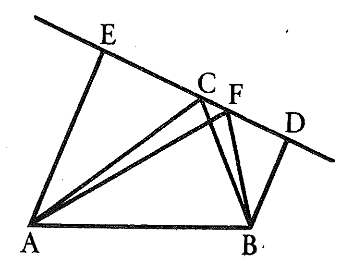
[9] Voir [37] XI, p. 214, note 11, où l'on apprend que le père de Huygens possédait l'ouvrage de Fermat mais ne le retrouva qu'en 1655, ainsi que les références relatives.

[10] Voir [37] XII, pp.39-41.

Huygens écrivit un essai proprement dit sur la *méthode*: il s'agit de la pièce qui commence par ***Ostenditur quae ratio sit regulae Fermattij...***, c'est-à-dire "Quel est l'idée de la règle de Fermat, de laquelle on donne aussi des exemples de Van Schooten, et quelques autres remarques"[11].

Si nous allons au delà des innovations que Huygens introduit au niveau des dessins, qui mériteraient un chapitre à eux seuls, la présentation de Huygens modifie en effet celle d'Hérigone-Van Schooten dès son point de départ, en ce qu'il ne pose pas explicitement $y=0$. A la place, et cela constitue le principal élément nouveau, il introduit une sorte de "discussion" de l'équation finale, après l'application de la règle. C'est-à-dire, après avoir écrit les deux équations, celle en **x** et celle en **x+y** "secundum Fermattii regulam", il néglige simplement les termes en **y**, et obtient ainsi $x = \frac{1}{2}c$. Mais il commente mathématiquement le résultat en ajoutant:

> **Afin de comprendre la raison de ces passages, il convient d'indiquer, dès le début, la quantité y par CF, segment d'une certaine grandeur; on cherche en effet combien CF doit être grand afin que, étant donné EC=x et tracés FA,FB, leur carrés soient égaux aux carrés de CA et CB. Car, où il s'agit de maximum ou de minimum, il y a un "cas d'égalité" des deux côtés [semper quippe ubi maximum vel minimum quaeritur, utrimque casus aequalitatis existit].([37] XII, p. 61)**



[11] "Ostenditur quae ratio sit regulae Fermattij, cujus exempla inferius à Schotenio asscripta sunt, dein alia docetur brevior." [37] XII, p.61.

Nous pouvons formuler deux hypothèses au sujet de ce que Huygens entendait par *utrimque casus aequalitatis*: 1) que cela coïncide avec ce que Fermat avait écrit dans sa lettre à Brûlart, et plus précisément ce que Fermat appelle son deuxième fondement: si l'on part d'un polynôme f(x), et si l'on veut déterminer l'argument **a** pour la valeur extrême, "f(a+e) et f(a–e) doivent donner la même équation", ou encore 2) que Huygens pense, à la suite de Descartes, à l'égalité des deux racines. Huygens continue:

> Donc, quand on obtient l'équation c–2x=y, cela signifie que si x , EC, est pris à la place d'une certaine grandeur, alors CF, y sera c–2x, tandis que si y, CF est la quantité connue, mais toujours la différence entre EC et CF, alors EC, x sera ½c–½y. Il est clair de toute façon que x et ½c différeront de moins en moins si y est posé de plus en plus petit, parce que si y est égal à zéro, x sera égal à ½c. De cela il résulte évident que si l'on pose EC=½ED et l'on trace CA, CB, leurs carrés seront minima, et alors le cas d'égalité sera nul, et si nous posons CF aussi petit que nous voulons, si elle est plus grande que zéro, les carrés de FA, FB seront plus grand que CA,CB.(ibidem)

Or, cette argumentation, ainsi que ce qui précède, nous fait décider pour la première hypothèse, car nous avons interprété ainsi le fondement de la *méthode*. D'autre part, il est vrai que Huygens travaillait à une conciliation entre l'approche de Fermat et l'approche de Descartes. Cela résulte déjà de ce que nous avons vu à propos de la détermination de la normale présentée par van Schooten, mais aussi du fait que Huygens décrit ici, comme abréviation de la *méthode*, la méthode expliquée par Descartes dans sa ***Géométrie***, et fondée précisément sur l'égalité des deux racines dans le cas de l'extrêmum. Après avoir appliqué cette méthode à quelques exemples, Huygens la transforme en une procédure pour la détermination des tangentes.

3.Van Schooten, 1659

En 1659 van Schooten introduisit dans sa deuxième édition de la ***Geometria*** un exemple de la *méthode* de Fermat avec une référence explicite au ***Cursus Mathematicus*** d'Hérigone.

Dans la ***Geometria***, laquelle d'ailleurs, il faut le rappeler, est son premier texte publié sur la question, van Schooten fait usage d'une notation mixte Descartes–Fermat, car il n'emploie plus le symbole **y** pour le **E** de Fermat (ou le **e** d'Hérigone), mais il choisit le symbole **y** pour la première inconnue (qui pour Fermat était **A**, et **a** pour Hérigone) et **e** pour la deuxième. A part cela, van Schooten suit la version d'Hérigone, en particulier en ce qui concerne le fait de poser **e** égal à zéro et d'exclure l'*adaequatio*.

Après avoir appliqué la *méthode* à la détermination de la tangente à la conchoïde, van Schooten propose aussi une innovation pour abréger le procédé. Il s'agit d'omettre *continue*, c'est-à-dire uniformément, les multiplications dans lesquelles on élève **e** au carré ou à des degrés supérieurs au carré, et cela déjà tout de suite après le deuxième pas du procédé, à savoir après avoir posé l'égalité entre l'équation en **x** et l'équation en **x+y**.

Van Schooten affirme à ce propos qu'il croit que Huygens aussi s'est servi de cette simplification, ce qui est vrai, car nous avons au moins un exemple où Huygens en fait usage.

Outre cette modification, van Schooten présente dans ce contexte la variante de Hudde, qui fait aussi l'objet de la section de la ***Geometria*** écrite par Hudde lui-même, et qui se détache substantiellement de la *méthode* de Fermat, bien qu'elle lui soit affiliée. Nous ne nous occuperons pas, ici, de cette variante, qui d'ailleurs fut universellement considérée, dès son introduction, comme distincte de la *méthode* de Fermat: qu'il suffise de dire qu'il s'agit d'une version du procédé plus directement applicable à des fonctions rationnelles fractionnaires[12].

L'importance de la présentation de van Schooten est due au fait que la ***Geometria*** fut le texte d'algèbre et de géométrie le plus répandu au XVIIe, et que beaucoup de mathématiciens, dont Leibniz et Newton, commencèrent à étudier les mathématiques avancées précisément sur ce texte.

4. Huygens 1667

Huygens donna une présentation publique de la *méthode* de Fermat, et précisément à l'Académie royale des sciences, en 1667. Ce texte est d'une grande importance par rapport à la tradition de la *méthode*. D'abord, à cause du lieu de la présentation; ensuite, parce que Huygens reprit les termes et les variantes introduits dans l'exposé de 1652, mais beaucoup plus explicitement; enfin, parce que Huygens introduisit le terme ***infiniment petit*** à propos des **e** de Fermat. Huygens écrit:

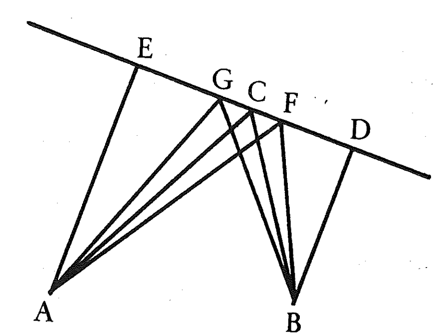
> Fermat est le premier homme que je sache qui ait établi une règle certaine pour déterminer les valeurs maximales et minimales dans les questions géométriques. En recherchant le fondement qu'il n'a pas communiqué, j'ai trouvé en même temps de quelle manière cette règle peut être réduite à une brièveté remarquable, de sorte qu'elle s'accorde désormais avec celle donnée plus tard par l'honorable Joh. Hudde comme une partie de sa règle plus générale et fort élégante qui s'appuie sur un tout autre principe. Cette dernière a été publiée par Fr. van Schooten

[12]Je renvoie ici à l'article ***Hudde*** du [103], de K. Haas. A la page 537, il traduit la règle de Hudde comme suit: "If in an equation two roots are equal and the equation is multiplied by an arithmetic progression to whatever degree is desired – that is, the first term of the equation is multiplied by the first term of the progression, the second term of the equation by the second term of the progression, and so on in regular order – then I say that the product will be an equation in which one of the mentioned roots will be found."

> dans le recueil qui contient aussi les livres de Descartes sur la Géométrie. Or, ma méthode d'examiner la règle de Fermat était la suivante.
>
> Toutes les fois que dans un problème quelconque il s'agit de déterminer un maximum ou un minimum, il est certain qu'il existe des valeurs égales de part et d'autre." ([37] XX, p.229)

Huygens examine ensuite, sur un exemple, la procédure de Fermat. Son but étant celui de justifier la procédure, il reprend en partie la version de l'***Analytica***, au sens qu'il considère d'abord le cas général, où les deux racines sont distinctes, et ensuite le cas où "le point est unique", selon l'expression de Fermat, ou "il existe des valeurs égales de part et d'autre", selon l'expression de Huygens. Sa première innovation est l'usage de **x** et **e** à la place de **x** et **y** des versions précédentes. En outre, après avoir introduit la deuxième équation (celle en **x+e**), où EG=x, GF=e et EF=x+e "GF ou **e** désignant une ligne de longueur donnée", il écrit:

> Or, en prenant e infiniment petite [infinite paruam] la même équation donnera la valeur de EG lorsqu'elle est égale à EF. De cette façon nous aurons déterminé le point cherché C pour lequel $CA^2 + CB^2$ = minimum.
> (ibidem, p.230)



Il s'agit donc de la première fois où le terme "infiniment petit" est employé pour indiquer le *e* de Fermat, et Huygens, de façon cohérente, en fait usage aussi pour les puissances de *e*:

> Enfin on divise tous les termes par e et on détruit ceux qui, après cette division, contiennent encore cette lettre, puisqu'ils représentent des quantités infiniment petites par rapport à ceux qui ne renferment plus e. C'est de ces derniers seuls qu'on tire enfin la quantité x satisfaisant au problème proposé. Telle est la méthode de Fermat.

On voit ainsi comment Huygens transforme la *méthode* de Fermat non seulement en travaillant à sa "simplification", mais aussi en interprétant la procédure à la lumière de la nouvelle notion d'infiniment petit.

Dans la suite de l'exposé Huygens propose sa correction de la *méthode* de Fermat, déjà présentée, quoique avec moins d'efficacité, dans l'exposé de 1652. Le manuscrit de cet exposé est daté du 17 mars 1667. Le 16 avril Huygens écrivit la ***Règle pour trouver les tangentes des lignes courbes***, qui commence comme suit:

> le même Fermat cherchait les tangentes aux lignes courbes par une règle à lui, dont Descartes soupçonnait qu'il ne comprenait pas suffisamment lui-même les fondements, comme cela appert par les lettres de Descartes sur ce sujet. Il est vrai que dans les oeuvres posthumes de Descartes l'application de la règle n'est pas bien exposée et que toute démonstration y fait défaut. (...) En ce temps abréger la règle de Fermat était pour moi une chose importante. L'ayant rendue aussi brève que je pouvais, je constatai qu'elle devient identique avec les belles règles de Hudde et de Sluse dont ces deux messieurs m'avaient fait part presque simultanément. J'ignore encore s'ils y sont parvenus de la même manière que moi ou bien d'une autre. ([37] XX, p. 243)

Huygens n'introduit pas de changements au niveau de la règle, du moins par rapport à sa version de 1652, mais il fait une autre référence aux infiniment petits:

> ... de sorte que FE ou e est infiniment petite. Car les termes dans lesquels e est restée représenteront alors des quantités infiniment petites ou entièrement évanouissantes.

Cela conclut l'évolution de la *méthode* de Fermat dans la réélaboration de Huygens. Avec la présentation à l'Académie des sciences, la *méthode* de Fermat entra dans l'histoire, car d'une part elle fut considérée l'ancêtre des méthodes de Hudde et de Sluse, et d'autre part cette branche des mathématiques commençait à se développer comme calcul infinitésimal.

Quelques années plus tard, et précisément le 27 septembre 1672, Huygens écrivit à Oldenburg un jugement sur presque toutes les règles des tangentes disponibles à l'époque, en comparaison avec deux règles que Wallis avait proposées. Au sujet de celle de Fermat, il écrivit:

> Pour ce qui est des regles de Monsieur Wallis pour les Tangentes, dont vous auez voulu sçavoir mon opinion, je trouue que la premiere ne differe point de celle de Monsieur Fermat qui est expliquée dans Hérigone. Elle y est de la même façon qu'on la concoit Monsieur Wallis, mais à mon avis ni l'un ni l'autre n'en monstre le vray fondement que j'ay trouué tout autre.([37] VII, p.249)[13]

5. Newton et Leibniz

Nous trouvons dans des manuscrits de Newton, écrits probablement entre 1711 et 1720, une référence importante à la méthode de Fermat:

---

[13]Le jugement continue ainsi: "la seconde methode ne m'estoit pas inconnue non plus, de la quelle Monsieur Roberual se vante d'estre le premier inuenteur il y a longues années, et je me souuiens qu'il nous l'a expliquée cy deuant notre assemblée. Mais il y a vne autre methode meilleure et beaucoup plus compendieuse que tout cela pour les Tangentes,que j'ay expliquée a la mesme assemblée, et qui est connue de Monsieur Sluse et de Monsieur Hudde il y a longtemps. A celle la il ne faut que voir seulement l'aequation qui exprime la nature de la ligne, et de cette aequation l'on en tire d'abord, et sans aucune peine, vne autre qui donne la construction de la tangente.

Archimedes in drawing tangents to spirals gave an instance of ... the method of fluxions ... Fermat gave another instance of it determining the greatest & least quantities & applying the determination to the drawing of Tangents to Curves. This method was published by Herigon in his Cursus A.C. 1631, & a specimen of it was inserted by Schoten in his Commentaries on the 2^d book of Cartes's Geometry. ... M^r Newton affirms that in y^e year 1664 & y^e winter following upon reading the Geometry of Des Cartes $w^t h$ his Commentators he met with the method of Fermat in y^e second book of Schooten's commentaries & not long after applied it to abstracted aequations in the manner described in the first Proposition of his book of Quadrature but did not use y^e language of Fluxions from the beginning.[14]

Ainsi nous savons que la source de la *méthode* ne fut pas en effet, pour Newton, le ***Cursus Mathematicus*** d'Hérigone, mais la ***Geometria*** de Van Schooten, et que Newton reconnut que la méthode de Fermat avait été à l'origine de sa détermination des maxima et minima. Il s'agit donc d'une déclaration très importante. Whiteside remarque que L.T.More dans son ***Isaac Newton*** arriva jusqu'à affirmer que Newton déclara dans ce texte sa dette par rapport à Fermat, tandis qu'évidemment Newton ne consulta pas les textes originaux de Fermat. Je crois cependant que la présentation de Van Schooten était suffisante à transmettre la procédure de Fermat à un mathématicien comme Newton. Une autre remarque de Whiteside concerne la date du ***Cursus*** dans la texte de Newton. Or, il est vrai que nous n'avons pas de trace d'édition du ***Cursus*** sinon celles de 1634 et 1644. Mais nous avons vu aussi que D'Alembert donne la même date pour l'ouvrage d'Hérigone, qu'il a pourtant examiné en détail. Outre l'hypothèse de deux erreurs identiques, nous pouvons donc formuler celle de l'existence d'une réimpression du ***Cursus***, ou encore d'une source commune de l'erreur, que malheureusement nous ne connaissons pas.

Quant à Leibniz, nous savons qu'il apprit la méthode des maxima et minima directement de Huygens, donc qu'il apprit la *méthode* de Fermat "corrigée" par Huygens. En outre, dans son écrit autobiographique ***Historia***

---

[14]Voir [45], I, pp.148–149.

et origo calculi differentialis il cite Fermat parmi les ancêtres de la discipline ([43] p.393). Je me bornerai à rappeler ici un texte qui nous intéresse, car nous pouvons en déduire que la version de la *méthode* connue par Leibniz n'était pas originelle de Fermat, mais dépendait probablement d'Hérigone:

> Cumque in calculo praecedente adhibetur o & ov, quis non videt, revera adhiberi infinite parvas, nempe o pro dx & ov pro dz. Sane 0 iam Fermatius aliique in talibus casibus adhibuere.[15]

où Leibniz montre ne pas savoir que Fermat n'avait jamais employé **o** pour ses quantités "à effacer", et aussi que l'expression "quantité infiniment petite" était un anachronisme si appliquée à ces quantités de Fermat.

Il est remarquable qu'après ces observations de Leibniz de 1712, la méthode des maxima la plus connue cesse de porter le nom de Fermat[16]. Par exemple, l'***Encyclopédie*** ne cite pas Fermat à propos des maxima et minima, mais seulement en relation avec la théorie des nombres et les équations indéterminées. Mais les origines du calcul infinitésimal étaient devenues une question "purement historique", et il faut attendre Montucla pour voir reconnus les mérites de Fermat dans ce domaine. Lacroix écrivit plusieurs remarques à propos de la *méthode* de Fermat, dont les suivantes:

> Fermat était en possession avant Descartes d'une méthode des tangentes, mais il ne publia qu'après que Descartes eût fait connoître la sienne, et il y joignit une méthode ***de Maximis et Minimis***. Les méthodes sont plus simples que celles de Descartes, mais elles ne furent pour ainsi dire qu'indiquées par Fermat, qui loin d'imiter la noble franchise de Descartes,

---

[15]Voir Newton [45] II, p.261. Il s'agit du compte rendu de Leibniz à propos du ***De analysi*** de Newton, publié dans ***Acta eruditorum*** vers février 1712.

[16]Avant les écrits cités de Newton et Leibniz M. Guisnée publia le célèbre ***Observations sur les Méthodes de Maximis et Minimis, où l'on fait voir l'identité et la différence de celle de l'Analyse des Infiniment petits avec celles de Mrs. Fermat & Hudde***, [33]. Il s'agit cependant d'une explication offerte aux lecteurs du texte de de L'Hôpital, et la comparaison identifie la méthode de Fermat et celle de Hudde. De Fermat il ne reste ici que le nom.

ne laissa point appercevoir, du moins pour celle ***de Maximis et Minimis*** quelle route avait pu l'y conduire, et de quelle manière on pouvoit la démontrer ([39], p. VIII)

Il semble que le premier à proposer Fermat comme "précurseur du calcul infinitésimal" (selon l'expression d'Itard) fut Lagrange, avec lequel nous allons conclure ce chapitre.

6. Lagrange

Parmi les auteurs qui établirent le prestige de la *méthode* de Fermat, Lagrange fut l'un des plus accrédités, grâce à son rôle dans l'histoire de la transition du calcul infinitésimal à l'analyse. Ainsi, ses lignes sur Fermat sont célèbres, et contribuèrent au constant intérêt qui entoure les travaux de Fermat au delà de la théorie des nombres.

Lagrange écrit en effet dans ses ***Leçons sur le calcul des fonctions*** (1806, leçon XVIII):

> On peut regarder Fermat comme le premier inventeur des nouveaux calculs. Dans sa méthode *de maximis et minimis*, il égale l'expression de la quantité dont on recherche le maximum ou le minimum à l'expression de la même quantité, dans laquelle l'inconnue est augmentée d'une quantité indéterminée. Il fait disparaître dans cette équation les radicaux et les fractions s'il y en a, et, après avoir effacé les termes communs dans les deux membres, il divise tous les autres par la quantité indéterminée par laquelle ils se trouvent multipliés; ensuite il fait cette quantité nulle, et il a une équation qui sert à déterminer l'inconnue de la question. ([40][17] X, p. 294)

[17]J'ai employé la réimpréssion par Olms Verlag (1973) de J. L. Lagrange [40]. Le volume IX, avait été imprimé en 1881, le volume X en 1884. La ***Théorie des fonctions analytiques*** fut publiée en 1797 et inclue dans le t.IX.

Lagrange fait suivre cette description verbale par l'exemple du maximum de $ax-x^2$. Or, ce qui est nouveau ici est la notation, car non seulement Lagrange présente la *méthode* de Fermat en notation fonctionnelle, mais il emploie comme symboles des inconnues/variables, respectivement, **x** et **e**[18]. Cela introduit déjà l'analogie, ou même l'identité, que Lagrange veut établir entre sa notion de dérivée et de tangente et celle de Fermat. En effet, Lagrange continue:

> Il est facile de voir, au premier coup d'oeil, que la règle déduite du Calcul différentiel, qui consiste à égaler à zéro la différentielle de l'expression qu'on veut rendre un maximum ou un minimum, prise en faisant varier l'inconnue de cette expression, donne le même résultat, parce que le fond est le même, et que les termes qu'on néglige comme infiniment petits dans le calcul différentiel sont ceux qu'on doit supprimer comme nuls dans la méthode de Fermat.([40] X, p.295)

Après avoir habilement résumé la règle des tangentes[19], il conclut:

> On voit que Fermat a ouvert la carrière par une idée très originale, mais un peu obscure, qui consiste à introduire dans l'équation une indéterminée qui doit être nulle par la nature de la question, mais qu'on ne fait évanouir qu'après avoir divisé toute l'équation par cette même quantité.
> Cette idée est devenue le germe des nouveaux calculs qui ont fait faire tant de progrès à la Géométrie et à la Mécanique; mais on peut dire qu'elle a porté aussi son obscurité sur les principes de ces calculs.
> Maintenant qu'on a une métaphysique bien claire de ces principes, on voit que la quantité indéterminée que Fermat ajoutait à l'inconnue ne

[18]On remarquera que Huygens avait précédé Lagrange pour cette notation dans sa présentation à l'Académie royale des sciences en 1667 (notre section 4).

[19]Lagrange écrit en effet: "Sa méthode des tangentes dépend du même principe. Dans l'équation entre l'abscisse et l'ordonnée, que Fermat appelle la propriété spécifique de la courbe, il augmente ou diminue l'abscisse d'une quantité indéterminée, et il regarde la nouvelle ordonnée comme appartenant à la fois à la courbe et à la tangente, ce qui fournit une équation qu'il traite comme celle de *la méthode de maximis et minimis*." ([40] X, p.295). Lagrange continue développant un exemple et sa comparaison avec l'approche de Leibniz.

servait qu'à former la fonction dérivée qui doit être nulle dans le cas du maximum ou minimum, et qui sert en général à déterminer la position des tangentes des courbes. ([40] X, p.297)

La dernière phrase accomplit le travail de réduction de la *méthode* de Fermat en termes de l'analyse de Lagrange: Fermat représentait l'antécédent idéal pour Lagrange, qui avait refondé le calcul infinitésimal en termes purement algébriques en construisant la notion de fonction dérivée sur le développement de *toute* fonction en série de puissances[20]. D'abord, parce que l'univers des fonctions auquel son calcul s'appliquait était donc au moins comparable avec le domaine d'application de la *méthode* de Fermat; deuxièmement, parce que Fermat, en comparaison avec Barrow et Leibniz, par exemple, a l'avantage de ne pas légitimer l'existence des infiniment petits, car il se borne à annuler une quantité. Cela rend sa procédure plus formelle, et plus semblable à celle de Lagrange, qui annule simplement le premier coefficient du développement en série de puissances. Je crois donc que Lagrange aurait été encore plus convaincant s'il avait eu à sa disposition la lettre à Brûlart, où Fermat lui-même se refère au développement en série de puissances, même si dans les limites que nous avons vues. Lagrange conclut:

> Mais les géomètres contemporains de Fermat ne saisirent point l'esprit de ce nouveau genre de calcul; ils ne le regardèrent que comme un artifice particulier, applicable seulement à quelques cas et sujet à beaucoup de difficultés. On peut voir, dans le troisième Tome des ***Lettres*** de Descartes, sa longue dispute avec Fermat sur ce sujet. Aussi cette invention, qui avait paru un peu avant la ***Géométrie*** de Descartes, demeura-t-elle stérile et presque dans l'oubli pendant près de quarante ans; car, si l'on excepte la règle de Sluze pour trouver les tangentes, qui paraît déduite de la méthode de Fermat, et la méthode donnée par Wallis pour le même objet, laquelle n'est que celle de Fermat présentée d'une

[20]Voir en particulier les deux premiers chapitres de ***Théorie des fonctions analytiques***, [40] IX pp.21-33, ou le deuxième chapitre de ***Leçons sur le calcul des fonctions***, [40] X pp.13-19 (voir [40]).

> manière moins abstraite, cet espace de temps n'offre rien qui ait rapport à la découverte de Fermat.([40] X, 297)

Ce jugement historique eut probablement une grande influence, et d'ailleurs il semble parfaitement raisonnable. Par contre, nous savons que la *méthode* de Fermat fut la méthode des maxima et minima par excellence de 1638 jusqu'à Newton et Leibniz, qui associaient la technique à son nom, et que les variantes de Van Schooten et Huygens, reconnues comme simples variantes de la *méthode* de Fermat, furent incluses dans le manuel principal de techniques algébriques en géométrie, la ***Geometria*** de Van Schooten. En outre, dans ce même texte, la méthode de Hudde est vue comme une extension de la *méthode* de Fermat, malgré qu'elle paraisse à nos yeux plutôt dérivée de celle de Descartes. L'avis de Lagrange semble donc conditionné par son but, qui est celui de reconstruire l'histoire de façon que les seuls deux moments non métaphysiques du développement du calcul infinitésimal fussent Fermat et Lagrange. Son approche est cependante justifiée par le fait que ce qui l'intéresse en réalité n'est pas le crédit attribué à la *méthode* ou sa diffusion, mais seulement sa trasformation dans un algorithme de l'analyse moderne. Par rapport à ce processus on peut dire en effet que la *méthode* resta stable pendant plusieurs années, peut-être aussi grâce à son succès et à son efficacité.[21]

[21]La première discussion de la *méthode* de Fermat appartient à la conclusion de la leçon XVIIIe, sur le calcul des différences finies. Dans la leçon XXIe, sur les conditions d'intégrabilité, et des maxima et minima, Lagrange écrit: "Fermat est le premier, comme nous l'avons vu dans la Leçon XVIII, qui ait donné, pour la solution des problèmes de ce genre, une méthode directe et analytique, que l'algorithme du Calcul différentiel a ensuite simplifiée et généralisée; elle se réduit, comme l'on sait, à égaler à zéro la différentielle ou la fonction prime de la fonction qui doit être un maximum ou un minimum, en regardant comme variable l'inconnue par rapport à laquelle la fonction donnée doit devenir la plus grande ou la plus petite." ([40] X, p.384)

CHAPITRE VI

LA GEOMETRIE DIFFERENTIELLE SYNTHETIQUE ET LA METHODE DE FERMAT

Une théorie mathématique récente, la géométrie différentielle synthétique[1], a adopté un point de vue qui suggère de rapprocher son calcul différentiel de la *méthode* de Fermat. Ses auteurs ont explicité cette référence par des rappels directs à l'autorité classique, tel "l'axiome de Fermat".

Mais si, d'une part, la *méthode* de Fermat joue un rôle de fondement historique de la théorie nouvelle, d'autre part, la présentation plus moderne aurait, sur l'ancienne, l'important avantage d'être logiquement cohérente. Il y a donc une analogie entre ce rapprochement et le rapport qui lie l'analyse non standard de Robinson et le calcul infinitésimal leibnizien. Dans les deux cas, la nouvelle théorie permettrait une justification logique des procédés anciens, c'est-à-dire du calcul infinitésimal de Leibniz et des procédures de maxima et minima de Fermat: et il n'y a pas de doute que Fermat, autant que Leibniz, employait des principes nouveaux dans le contexte classique sans trop se soucier d'aboutir à des conséquences contradictoires.

D'un autre point de vue l'intérêt de voir une partie de la nouvelle théorie comme une sorte de "transcription" d'une technique du XVIIe siècle en termes modernes pourrait se trouver plutôt dans la possibilité d'inaugurer une nouvelle lecture du texte classique, et par conséquent d'éclairer des aspects méconnus de la théorie ancienne. Dans le cas particulier de la *méthode* de Fermat la transcription en langage contemporain ouvre la

[1]Il y a eu au moins deux dénominations de cette théorie: celle de "Géometrie différentielle formelle" (voir A. Kock et G.E. Reyes [150], et celle, désormais devenue stable, de "Géométrie différentielle synthétique", présente déjà dans A.Kock, [140]. La deuxième fut en effet reconnue plus conforme aux idées et conjectures originelles de Lawvere, qui avait proposé le contexte des topoi comme celui où, pour traiter les objets géométriques, il n'était pas nécessaire de les réduire aux nombres (réels).

possibilité de suivre un parcours interrompu de la recherche mathématique, en reconnaissant les bornes et les ressources d'une approche qui a été dépassée plutôt qu'intégrée par le calcul infinitésimal.

Tout en affirmant la légitimité de ces deux différents sens de la transcription, il faut reconnaître ce qu'elle implique. Avant tout, un "continuisme", une vision cumulative du savoir mathématique. Cela paraît, dans le premier sens, en ce que l'on assimile le problème d'une justification logique de la *méthode* de Fermat avec la tradition des problèmes des fondements en mathématiques, particulièrement par rapport à l'analyse. Par conséquent, la solution adoptée comporte l'identification de l'"univers fondationnel" des mathématiques du XVIIe siècle avec l'univers fondationnel des mathématiques contemporaines (ou du moins avec un sous-univers de ce dernier). D'autre part, la transcription est vue ouvertement comme une réduction des mathématiques du XVIIe siècle au langage et à l'univers de référence des mathématiques contemporaines.

Le deuxième sens de la transcription, la perspective comparative, l'interprète come un outil pour se rendre compte des affinités mais aussi des différences entre la théorie ancienne et la théorie moderne. Nous aboutirons à cette comparaison après avoir esquissé les éléments de la théorie de la géométrie différentielle synthétique (dorénavant, GDS) qui sont plus directement en relation avec les problèmes des extrêma et des tangentes.

1. GDS: motivations fondationnelles

L'idée de formuler le calcul différentiel "sans analyse", c'est-à-dire sans travailler sur la structure des nombres réels, fut proposée par W. Lawvere dans sa conférence ***Categorical dynamics*** de 1967[2]. Lawvere

---

[2]D'après les notes prises par A.Kock, cette conférence a eu lieu à Chicago le 19 mai 1967. J'ai pu consulter ces notes ainsi que celles d'Eduardo Dubuc, grâce à la collaboration des deux auteurs. Je possède aussi la copie de la transcription rédigée par MacLane et corrigée par Lawvere lui-même à l'occasion de sa nouvelle présentation du

suggéra que les méthodes catégorielles étaient efficaces pour établir des axiomes simples dans les domaines physiques des mathématiques, comme la mécanique des fluides, la thermodynamique, l'analyse harmonique et la géométrie différentielle. Le projet s'étendait donc bien au-delà du calcul différentiel pour inclure une refonte axiomatique de la mécanique du continu[3].

La question était posée dans un contexte susceptible de fournir une réponse et Lawvere présentait ce programme de recherche aux mathématiciens engagés dans le développement de la toute récente théorie des "topoi". Pour comprendre les motivations de la GDS il nous faut donc décrire brièvement le plus vaste contexte de recherche de ses fondateurs.

La théorie des catégories, née comme langage approprié à décrire des situations "universelles" en topologie algébrique (les isomorphismes naturels), joua tout de suite un rôle d'interprétation des autres théories mathématiques. La nouvelle théorie fournit en effet un nouveau langage et un outil de conceptualisation qui ouvrait la possibilité d'établir les lois universelles de transformation entre les structures, de manière que l'on puisse reconnaître les uniformités de construction à travers diverses théories mathématiques. Ainsi, la recherche sur les fondements n'était plus séparée, de droit, de la recherche mathématique proprement dite. Depuis l'article de Eilenberg et MacLane[4], suivi de nombreux travaux[5], les propositions de

---

sujet à Milan, en juillet 1978. Il y a maintenant une version publiée (et révisée) de cette conférence, [156]. La première citation est tirée de la trascription corrigée en 1978.

[3] Lawvere faisait référence à Walter Noll, qui avait introduit, dans les années cinquante, une présentation de la mécanique continue et de la thermodynamique dans le langage mathématique contemporain. Noll participa, en 1982, au colloque "Categorie in continuum physics", dont les comptes rendus ont été publiés chez Springer (Springer Lecture Notes, 1986). Les éditeurs sont W. Lawvere et S. Schanuel. D'autre part, en géométrie algébrique, à l'origine du programme de Lawvere sont les travaux de Kaehler, Grothendieck et Cartier, et ensuite de Gabriel, qui avaient développé l'idée de produire le calcul différentiel par moyen des éléments nilpotents (voir les classiques M.Demazure, P.Gabriel [132], et A.Grothendieck, J.A.Dieudonné [137].

[4] La théorie des catégories fut introduite par l'article de Samuel Eilenberg et Saunders MacLane, [134]. Outre à proposer cette théorie les catégories (objets et flèches) et la catégorie des catégories (catégories et foncteurs, les transformations de foncteurs décrivant

Lawvere donnèrent un nouvel essor aux possibilités ouvertes par l'étude catégorielle des fondements. Lawvere jeta les bases de cette approche dans plusieurs écrits de 1963 à 1971, aboutissant à l'introduction de la notion de *topos* élémentaire. D'abord, du côté proprement fondationnel, il suggéra d'étudier les fondements des mathématiques non pas à partir des axiomes de la *théorie* des ensembles, mais avec les axiomes de la *catégorie* des ensembles [152]; ensuite, il proposa les axiomes pour la catégorie de toutes les catégories[6]. Mais le vrai tournant de l'élaboration de Lawvere dans les fondements des mathématiques est représenté par l'article ***Adjointness in Foundations*** (1969) [154], qui tira les conclusions des nombreux travaux en théorie catégorielle des modèles. Dans ces derniers, Lawvere avait proposé de voir chaque théorie comme une catégorie (la théorie invariante) et chaque modèle comme un foncteur[7]. Dans cette perspective, le rapport entre théorie et modèle est vu dans les termes des relations entre les ensembles d'axiomes et une classe entière de modèles: cette relation est une adjonction[8], ce qui "globalise" utilement la situation précédente; ainsi on peut donner une description mathématique du processus même qui modifie les modèles suivant les transformations dans la théorie. Ce procédé

les isomorphismes naturels qui étaient l'objet de l'article), les auteurs explicitèrent la motivation et le rôle de l'approche catégorielle dans les fondements des mathématiques. Il s'agit de donner un traitement uniforme aux différents domaines des mathématiques pour mettre en evidence les analogies, et la possibilité de comparaison entre constructions et isomorphismes qui paraîssent dans des théories différentes.

[5] Parmi les contributions fondamentales à l'évolution de la théorie des catégories, il faut rappeler: P. Samuel [169], première formulation de l'idée de construction universelle, ainsi que D. M. Kan [139], qui introduisit le concept d'adjonction.

[6] Voir W. Lawvere, ***The Category of Categories as a Foundation of Mathematics***, [153].

[7] Ce qui est la version catégorielle des idées de l'algèbre universelle: théorie comme algèbre libre dans une classe d'algèbres, interprétation comme morphisme. Bien entendu, la version catégorielle suggère et promeut une application générale.

[8] Il s'agit de la notion introduite par Kan, en 1958. Pour une définition et des exemples, voir S. Mac Lane [159], p.77, avec un profil de l'histoire de cette notion à la page 103.

comporte en outre deux innovations: d'une part, l'on transforme le rapport entre théorie et modèle en une relation entre deux catégories quelconques, en mettant en évidence l'identité de structure; d'autre part, l'on attribue entièrement au modèle, en tant que foncteur, le rôle de représenter, ou plutôt d'être, la structure que l'on considère. Ce sont exactement les deux idées dominantes de l'article ***Adjointness in Foundations***, où Lawvere redéfinit les problèmes des fondements en affirmant:

> Foundations will mean here the study of what is universal in mathematics.

Ce principe explicite comment la pensée de Lawvere unifiait les développements théoriques en théorie des modèles et l'étude catégoriel des problèmes des fondements. Lawvere était tout à fait conscient de remplacer ainsi la vision classique des problèmes des fondements qui consiste à établir de bons axiomes pour les ensembles, (ce qu'il appelle l'approche formelle), par une approche qu'il qualifie de conceptuelle. Cette dernière est basée sur les modèles tant dans la formulation que dans la solution des problèmes des fondements, puisque une nouvelle façon de concevoir les structures va de pair avec la conception globale des fondements des mathématiques. Ici, par structure on entend non plus un ensemble fermé par rapport à certaines opérations, mais plutôt les différents morphismes entre des objets déjà structurés. De même, sur un plan plus général, les mathématiciens intéressés aux fondements pouvaient négliger la référence au "paradis cantorien" des ensembles pour se consacrer aux fondements que j'appellerais "immanents" des mathématiques, qui consistent à étudier les relations entre présentations formelles et constructions conceptuelles, dans la forme très spécifique des foncteurs adjoints. Pareillement, la logique mathématique pouvait expliquer les théories et les structures mathématiques, au lieu de servir de simple introduction: elle devenait donc une logique[9] qui est

[9] Lawvere formula cette distinction à plusieurs reprises, par exemples dans ses conférences de Milan, juillet 1977 et juillet 1978.

capable de mettre en évidence les identités de structure et de mettre en valeur les aspects principaux du processus de la pratique mathématique[10].

Quant à ce qui devait être considéré comme principal, il n'y avait pas de doutes, car la transformation des mathématiques proposée par Lawvere avait toujours été fondée sur une priorité des mathématiques de la matière en mouvement, identifiables avec la géométrie et l'analyse. Par conséquent, les autres grandes branches des mathématiques, l'arithmétique et l'algèbre, devaient trouver leur orientation dans les précédentes; inspiré par ce critère, Lawvere proposait d'entreprendre le processus inverse à celui qui s'est accompli historiquement, qui commença par l'introduction de l'algèbre dans les mathématiques occidentales et se poursuivit avec l'invention du calcul infinitésimal jusqu'à l'analyse de Cauchy, l'arithmétisation de l'analyse et finalement l'usage généralisé de l'algèbre abstraite. Ce bouleversement de l'orientation dominante en mathématiques était motivé par une critique politique de ses développements, qui interprète les mathématiques en termes de matérialisme dialectique. Lawvere soutenait que la science et en particulier les mathématiques ne sont pas politiquement "neutres". Les fondements ensemblistes des mathématiques étaient considérés comme idéalistes, de même que l'arithmétisation de l'analyse, parce qu'ils donnent la priorité aux aspects subjectifs des formes mathématiques et renoncent à assumer le rôle des mathématiques en tant que science des formes de l'espace et des rapports quantitatifs[11]. L'extranéité des fondements ensemblistes, de la logique classique et de l'analyse qui s'est développée parallèlement au "monde réel" est repérable au fait que l'analyse du XIXe siècle était oriéntée vers l'étude des cas pathologiques et n'a rien ajouté à l'étude et aux applications des fonctions lisses. En 1980 [157], Lawvere écrivait:

[10] J'emploie exprès la terminologie marxiste utilisée par Lawvere dans toutes ses oeuvres.

[11] Cette idée est explicitée par Engels dans *Antidühring*, comme Lawvere lui-même a souvent précisé.

> According to Lenin, the scientific world picture is a picture of matter-that-moves and matter-that-thinks, and moreover the special role of matter-that-thinks is to reflect the decisive relations in the world in order to provide theory as a guide to action. (p.377)

Les relations décisives sont ici conçues en référence à la section 3 (Méthode) de l'***Introduction à la Critique de l'économie politique*** de Marx, et, en mathématiques, sont identifiées aux axiomes. L'outil de préférence pour réaliser ce travail est la partie de la théorie des catégories qui a isolé les opérations fondamentales "dans le monde", c'est-à-dire les catégories cartésiennes fermées. Comme Lawvere écrit plus loin:

> In order to treat mathematically the decisive abstract general relations of physics, it is necessary that the mathematical world picture involve a cartesian-closed category of smooth morphisms between smooth spaces. (p.379)

Cette catégorie sera donc l'univers milieu de l'analyse et de la géométrie construites de la nouvelle manière.

En parallèle avec la première formulation de ce programme de 1967, Lawvere jetait les bases, avec Myles Tierney, de la théorie des topoi élémentaires, qui développait et généralisait l'étude des "ensembles variables" et "topoi" de la topologie algébrique (Artin, Deligne, Giraud, Grothendieck, Hakim, Verdier). La forme de la théorie des catégories mettait en évidence la logique des structures étudiées en géométrie algébrique (principalement les faisceaux) comme logique intuitionniste[12], et permettait d'établir le rapport entre ces structures et plusieurs résultats logiques: la sémantique de Kripke, la théorie abstraite de la démonstration, la méthode de Cohen-Scott-Solovay pour l'indépendance de l'hypothèse du continu, tous plus ou moins directement reliés à la logique intuitionniste, et aussi avec l'analyse non standard de Robinson, à cause de la référence à des structures variables. Ainsi, le cas des ensembles classiques peut être décrit

[12] Pour les rapports entre logique intuitionniste et logique des topoi par moyen de notions locales, voir Yvon Gauthier [135]. Pour un traitement de la théorie des topoi dans le plus vaste contexte des mathématiques constructives, voir le livre du même auteur [136].

comme un cas particulier d'ensembles variables, le cas constant. Si la nouvelle théorie était en mesure de rendre compte de façon unitaire de ces résultats, elle montrait aussi comment constituer un outil plus approprié pour étudier les structures variables avec continuité. De plus, elle permettait de réaliser l'aspect plus spécifiquement matérialiste du programme de Lawvere, dans une étude de l'analyse suivant les propres principes qu'il a posés.

2. Façons de voir la géométrie différentielle par les topoi

Le programme de Lawvere a été réalisé par plusieurs auteurs: Lawvere lui-même, Anders Kock, Gavin Wraith, Gonzalo Reyes, Eduardo Dubuc et Marta Bunge. Ainsi, plusieurs points de vue et différentes façons de voir les notions fondamentales de la théorie se sont développés. Nous nous bornerons à indiquer seulement quelques-unes de ces interprétations, en termes intuitifs.

Kock et Reyes ont mis l'accent sur la nouvelle conception de la "droite réelle" comme objet fondamental de l'étude. Kock, dans son livre et ses articles[13], et Reyes, dans plusieurs articles[14], ont proposé ce point de vue de façon systématique, et ils ont explicité ainsi le programme de légitimation de l'approche "naïve" ou "non rigoureuse" typique du calcul

[13] Par A.Kock, voir en particulier: [140] (déjà cité); [141]; [144], dans [142]; [145]; [146]. A.Kock est aussi l'éditeur du livre ***Topos theoretic methods in geometry*** [142], et auteur d'un livre consacré à la GDS, c'est-à-dire ***Synthetic differential geometry*** [147]. Un autre livre qui traite extensivement de la GDS et des thèmes reliés est celui édité par W. Lawvere et S. Schanuel, ***Categories in continuum physics***, [158]. Ce dernier contient un autre article important de Kock sur la GDS, soit [149].

[14] Voir d'abord les travaux avec A.Kock, soient [150]; [143] in [142]; [148]. De Reyes et G.Wraith, voir [167]. Ensuite, de Kock, Reyes et Barbara Veit, [151]. De Reyes avec A. Joyal: [138]; avec Ngo van Quê: [162]. Enfin, de Reyes, la série [163], et [164] in [168]. Parmi les travaux récents de cet auteur, les suivants concernent particulièrement notre sujet: L. Bélair et G. Reyes, [129]; G.Reyes, ***Types of infinitesimals***.

différentiel et intégral qui est enseigné aux ingénieurs, par exemple[15]. Dans cette perspective, les anneaux pour lesquels l'axiome de Lawvere Kock qui introduit la différentiation pour toutes les fonctions est vrai sont denommés "anneaux de type ligne", parce qu'ils possèdent les propriétés de la droite. D'autre part, puisqu'ils ne sont pas des corps, les axiomes laissent ouverte la possibilité d'admettre des éléments non inversibles différents de zéro, soit ceux que nous pensons comme des infiniment petits. Reyes en particulier a plusieurs fois rappelé le rapport de cette construction des anneaux de type ligne avec la "théorie des points proches sur des variétés differentiables" de Weil et Bourbaki, et la référence de Weil à Fermat. Car précisément André Weil fut celui qui, le premier, fit appel à Fermat en introduisant sa théorie. En 1953[16], il écrivit:

> Je me propose d'esquisser ici quelques-unes des idées de mon maître Nicolas Bourbaki sur la théorie des points "proches" ou "infiniment voisins" sur les variétés différentiables. Cette théorie a une double source, d'une part le retour aux méthodes de Fermat dans le calcul infinitésimal du premier ordre et d'autre part, la théorie des jets développée dans ces dernières années par Ch. Ehresmann: elle a pour but de fournir, pour le calcul différentiel d'ordre infinitésimal quelconque sur une variété, des moyens de calcul et des notations intrinsèques qui soient aussi bien adaptés à leur objet, et si possible, plus commodes que ceux du calcul tensoriel classique pour le premier ordre. (p.111)

Il ressort de cette citation que les deux théories ont plusieurs aspects communs, ce qui est confirmé par les définitions et le fonctionnement qui concernent les points proches vus comme vecteurs tangents à un point de la variété (p.113). Weil conclut que:

[15] Il s'agit de se référer, systématiquement, non pas à la notion de limite, mais aux infinitésimaux; non pas à la logique classique et à l'axiome de choix ou au tiers exclu mais à une logique naïve, non pas à des représentations analytiques des objets géométriques mais aux objets géométriques eux-mêmes (voir, sur cette distinction, en particulier G. Reyes, [164] (dans [158]).

[16] Voir A. Weil, [170].

C'est là essentiellement le point de vue de Fermat dans ses travaux sur le calcul différentiel (Fermat employait la lettre o là où nous écrivons τ). (ibidem)

Nous regrettons de ne pas pouvoir étendre la discussion à ce texte de Weil, malgré son intérêt, et nous aurions souhaité montrer les coïncidences et les différences du point de vue de Fermat et de Weil.

Antécédents historiques à part, Kock et Reyes soulignent aussi l'intérêt de présenter la GDS avec une référence "naïve" à la catégorie des ensembles, ce qui permet de concevoir les notions fondamentales de façon habituelle, avec la seule restriction de ne pas faire usage du tiers exclu. Ce point de vue met à profit une conséquence de l'approche des topoi, la possibilité de traiter les notions du calcul différentiel et intégral de façon purement algébrique[17].

Une autre approche est celle développée par Lawvere lui-même. Selon Lawvere, au lieu de mettre au centre de l'étude l'objet "droite réelle", il faut prendre l'anneau commutatif qui satisfait aux axiomes de la GDS en faisant référence à une autre conséquence de l'approche des topoi, selon laquelle cette théorie fournit le langage pour la construction d'un univers de discours où l'on peut prendre les variétés et les fonctions lisses comme point de départ. En effet, par la théorie des topoi, l'univers de discours est constitué à partir des axiomes de catégorie cartésienne fermée. On peut construire ainsi une catégorie de variétés différentiables où l'ensemble des fonctions lisses entre deux variétés est une variété à son tour. Cela résout certains problèmes de géométrie différentielle (car dans la géométrie différentielle habituelle cet ensemble n'est pas une variété), et permet de justifier le calcul différentiel intuitif et de développer avec simplicité la géométrie différentielle.

[17]Dans les dernières années, G.Reyes et I.Moerdijk ont obtenu des résultats particulièrement importants dans l'étude des modèles pour la GDS: leur livre est [166]. Partant de la conception générale indiquée, les auteurs montrent que dans la GDS on peut parler non seulement des "infiniment petits" définis comme nilpotents, qui dépendent du fait d'avoir admis une structure "faible" de **R**, mais aussi des "infinitésimaux" de Robinson, qui dépendent d'un enrichissement de la structure de **R**.

Le point de vue de Lawvere prend radicalement au sérieux cette perspective des topoi dans le sens de proposer une nouvelle conceptualisation, en termes d'espaces généralisés et de fermeture cartésienne. Autrement dit, Lawvere suggère[18] de définir les réels comme objet anneau commutatif **R** dans le topos **E** des espaces lisses et morphismes lisses, mais en le pensant comme l'anneau des endomorphismes du groupe abélien des translations de la droite géométrique. Lawvere propose ainsi une nouvelle notion de nombre réel comme "quantité pure". En effet, on peut penser[19] aux quantités pures des Grecs (dans le calcul après Eudoxe où, intuitivement, on étudie les différences de longueurs des segments), comme un ensemble de couples ordonnés de segments quotienté par rapport à la relation d'Eudoxe. Lawvere traduit cette notion de quantité pure par un morphisme de translations. Au lieu d'établir axiomatiquement les propriétés du topos **E** comme le font les travaux de Kock et Reyes, Lawvere développe sa théorie en "explorant" les propriétés du topos, c'est-à-dire en étudiant les opérations qui en font une catégorie cartésienne fermée. Ceci montre que ces constructions reprennent une intuition géométrique. D'autre part, il considère les catégories engendrées, en prenant par exemple le quotient du topos d'espaces par rapport à la catégorie originelle (objet du topos univers) ou encore en prenant les faisceaux définis sur la catégorie originelle. Cette nouvelle conceptualisation suggère de voir d'abord l'uniformité de structure de toutes ces constructions, qui du point de vue ensembliste paraissent à des niveaux différents. Par contre, du point de vue des topoi, espaces de points et espaces de "figures" peuvent être des objets du même topos ("gros", selon la dénomination de Grothendieck)[20]. L'autre suggestion qui justifie cette approche est que les notions "covariantes", c'est-à-dire les figures, comme

[18] Je paraphrase ici l'article cité [157].

[19] Voir en particulier, comme développement de l'idée de Lawvere, l'article de Giancarlo Meloni et Anna Casella, [160], ainsi que la thèse de Enrico Rogora, [168]. Je suis reconnaissante à Rogora pour notre discussion de la première ébauche de ce chapitre.

[20] Les développements et les applications de cette approche sont illustrés dans l'article de Lawvere [157], où l'auteur montre comment la structure de catégorie cartésienne fermée est exactement celle que l'on souhaite pour décrire les mouvements d'un corps continu.

les chemins, sont principales, du point de vue de l'intuition et de l'intérêt "physique" par rapport aux notions "contravariantes", comme les ouverts d'un espace topologique[21]. Dans une perspective très proche de celle de Lawvere, Dubuc a étudié les modèles de la GDS. Il prend comme catégorie des espaces et fonctions lisses la catégorie "op" des algèbres C^∞ à présentation finie, ce qui, géométriquement, équivaut à considérer comme espaces élémentaires le lieu des zéros d'un système fini de fonctions C^∞ en R^n. Le modèle de Dubuc est précisément le topos des faisceaux correspondant, défini par rapport à une topologie de Grothendieck opportune[22].

Récemment, Lawvere a proposé de reconstruire toutes les notions fondamentales de la GDS en partant exclusivement de la structure de **D**, ce qui intuitivement signifie comprendre les axiomes sur les réels à partir des axiomes sur les infiniment petits. Mais cela appartient aujourd'hui surtout à la tradition orale.

3. Théorie

Nous allons décrire ici le fragment de théorie de la géométrie différentielle synthétique qui constitue un calcul différentiel. On suivra l'approche de Kock et Reyes, tant dans la présentation que dans la façon de penser les notions introduites.

Selon l'approche habituelle, il s'agirait d'abord de définir la structure de la droite en établissant une correspondance biunivoque entre la droite et l'ensemble des nombre réels, ce qui, historiquement, a marqué la transition

[21] A ce propos, voir en particulier l'introduction de Lawvere au livre déjà cité [158], qui reparcourt plusieurs aspects de ce point de vue, esquissés ici très sommairement.

[22] De E.Dubuc, voir en particulier [133], ainsi que l'article avec G.Reyes, ***Subtoposes of the ring classifier***, dans [142]. Je regrette de ne pas pouvoir, dans les limites de cet exposé, inclure une référence à des travaux plus récents sur le sujet, en particulier ceux de Marta Bunge, dont je me bornerai à citer les articles [130] et [131].

de la géométrie synthétique à la géométrie analytique. Mais notre but est de travailler directement sur la structure géométrique de la droite. Oubliant les nombres réels définis classiquement, il faudra donc transposer à de "nouveaux" réels les axiomes que nous posons pour la droite. Ensuite, on étudiera un certain sousobjet **D** de la droite **A**, sousobjet qui représente les infiniment petits[23]. Troisièmement, on examinera plus en détail la relation d'ordre sur la droite, qui dépendra de la possibilité de distinguer les infiniment petits dans **D** des points dans **A**. Pour cela, on se servira de la propriété d'inversibilité et de deux relations d'ordre. Ayant ainsi précisé la notion d'infiniment petit du premier ordre, ce qui devrait simplifier l'intuition de ces éléments à l'esprit formé à l'analyse classique, nous parviendrons à la notion de dérivée.

Axiomes "structure de la droite"

1) **A** est un anneau commutatif unitaire, avec $1 \neq 0$

Il faut penser **A** comme la droite avec les opérations cartésiennes de somme (juxtaposition) et de produit (quatrième proportionnelle). On fixe un segment unité.

Du point de vue des modèles (dans les topoi), **A** est un objet d'un topos d'espaces lisses et des morphismes lisses, et **A** peut être conçu comme l'anneau des endomorphismes du groupe abélien des translations de la ligne géométrique.

2) **A** est muni de la relation de préordre (réflexive et transitive) **>**.

C'est-à-dire, on suppose comme primitive la relation $x > 0$, et on définit:

[23] L'idée d'identifier les infinitésiamux avec les nilpotents appartient à la géométrie algébrique récente. Mais la GDS soulève la question d'autres infinitésimaux. Voir à ce propos [161].

$$x > y \quad ssi \quad x - y > 0 \quad pour \ x,y \in \mathbf{A}$$

3) *non* ($x > 0$ *et* $-x > 0$)

Cet axiome est très important parce qu'il remplace celui de l'ordre total, c'est-à-dire la trichotomie. Faute de tricotomie, il n'y a pas d'égalité.

4) *si* $x > 0$ *et* $y > 0$, *alors* $x + y > 0$ *et* $x . y > 0$. Donc $1 > 0$

La relation **>** est compatible avec la structure d'anneau commutatif unitaire.

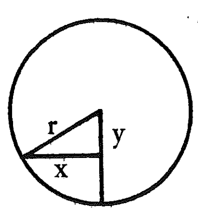
Infiniment petits du premier ordre comme nilpotents

Définition 1:

Soit **D** le sous-objet de **A** défini par

$$\mathbf{D} = \{x \in A \mid x^2 = 0\}$$

Géométriquement, **D** représente la perception et le "raisonnement physique" que l'intersection d'un cercle (ou de n'importe quelle courbe) et d'une droite tangente n'est pas un point mais un petit segment. Autrement dit, si l'on considère les triangles rectangles de la forme suivante:



ils sont représentés, grâce à Pythagore, par l'équation du cercle, $x^2 + y^2 = r^2$. Dans le cas du cercle à rayon unitaire on aura que $x^2 + y^2 = 1$. Nous pouvons donc penser aux éléments de **D** comme les x pour lesquels nous avons aussi $y^2 = 1$, d'où $x^2 = 0$. **D** est donc "autour" de zéro. Nous voulons pouvoir parler plus spécifiquement des éléments de **D** par rapport à zéro, car il nous intéresse de prendre en considération les éléments de **D** non banals, qui ne sont pas zéro. Dans ce but, nous allons définir la notion d'inversibilité.

Inversibilité

L'inversibilité est une propriété des éléments de **A** par rapport à l'origine **0** , c'est-à-dire:

Définition 2:

x est inversible ssi *il existe* $1/x$ tel que $x.1/x = 1$.

Nous introduisons deux axiomes de l'inversibilté sur **A**[24].

Axiome sur l'inversibilité I:

5) x est inversible *ssi* $x > 0$ *ou* $-x > 0$,

où on peut lire le côté droit comme $x > 0$ *ou* $x < 0$. L'inversibilité est donc la comparabilité avec zéro par rapport à la relation de préordre, **>**.

[24] Le traitement de l'inversibilité dépend de ma lecture des notes de Luc Bélair sur le calcul différentiel en GDS que leur auteur eut l'aimabilité de me montrer en septembre 1981.

Définition 3:

Soit $x, y \in A$, on écrit $x \# y$, c'est-à-dire, x est à part de y, si $x - y$ est inversible.

Donc on peut maintenant écrire l'axiome 5) comme

$$x \# 0 \textit{ ssi } x > 0 \textit{ ou } -x > 0 ,$$

ce qui veut dire, intuitivement, que x est inversible si et seulement si il est "suffisamment loin" de zéro, ou encore

$$x \text{ est inversible } \textit{ssi } x \# 0 .$$

Axiome sur l'inversibilité II:

6) *si* $x + y \# 0$, *alors* $x \# 0$ *ou* $y \# 0$

Cet axiome est très important, parce qu'il rend **A** un anneau *local*[25].

Les axiomes 3, 5 et 6 suffisent à démontrer la

Proposition 1.

pour tout $x \in A$, *si* $a > 0$ on a que $x > -a$ *ou* $x < a$.

ce qui nous donne la comparabilité.

[25] Pour quelques définitions équivalentes de l'anneau local, voir par exemple le classique Atiyah M.F. MacDonald I.G. [128].

Remarques

Nous pouvons maintenant faire quelques remarques sur la relation de préordre, l'inversibilité et les éléments de **D**.

i) D'abord on peut dire que les éléments de **D** sont ne sont pas inversibles, c'est-à-dire qu'il ne sont pas à part de zéro. Cela est en effet banal pour zéro, et on peut le démontrer pour les éléments de **D** différents de zéro [26].

ii) Les réels ordinaires sont parmi les inversibles de l'anneau **A**, et que l'on pourrait les obtenir en prenant le quotient par rapport à la somme avec des infiniment petits du premier ordre.

iii) D'après l'axiome 4) sur la compatibilité de **D** avec la structure de **A**, on a que la somme est interne aux inversibles positifs, ainsi que le produit, tandis que si l'on considère tous les inversibles, on peut obtenir des non inversibles comme somme de deux inversibles.

iv) A cause de l'axiome d'inversibilité **I**, les éléments non inversibles ne sont pas comparables avec zéro.

v) *Pour tout* $x \in A$, x est inversible si et seulement si $-x$ est inversible: on prend l'opposé de l'inverse comme l'inverse de l'opposé. On peut le démontrer grâce à la règle des signes pour le produit de l'anneau.

vi) On voit maintenant une importante signification de l'axiome 3): l'axiome **I** d'inversibilité associé à 3) dit en effet que si x n'est pas inversible on a que

$$\textit{non } (x > 0) \textit{ et non } (-x > 0)$$

[26] Si $d^2 = 0$ et $d \neq 0$, d n'est pas inversible. En effet, soit $d^2 = 0$, $d \neq 0$. Supposons par l'absurde que d soit inversible. Alors, il y a $1/d \neq 0$ tel que $d.1/d = 1$, donc $d.(d.1/d) = d$. Mais d'autre part $d(d.1/d) = (d.d)1/d = d.1/d = 0$, contradiction.

Il nous faut donc une notion de préordre qui rende les éléments de **D**, bien que non inversibles, comparables avec **0**, ce qui nous permettra de faire usage de la notion "habituelle" d'intervalle. En outre, puisque nous voulons arriver à une détermination de maxima et minima, nous sommes particulièrement intéressés aux relations d'ordre.

Comparabilité avec zéro

Définition 4:

On écrit $x \geq 0$ *ssi* *non* $(x < 0)$, et $x \geq y$ *ssi* $x - y \geq 0$.

La relation $\geq$ est compatible avec $>$, parce que

si $x - y > 0$ *alors* *non* $(x - y) < 0$, par 3),

donc *si* $x > y$ *alors* $x \geq y$.

A partir de la définition, de l'axiome 3) et du fait que **A** est local, on peut démontrer plusieurs propositions parmi lesquelles il faut rappeler les suivantes, qui mettent en évidence le rôle des nilpotents.

Proposition 2:

si $x , y \geq 0$, *alors* $x + y \geq 0$.

Proposition 3:

$x \geq 0$ *ssi* *pour tout* $a > 0$, $x + a > 0$.

Proposition 4:

Pour tout a , b , $a.b \# 0$ *ssi* $a \# 0$ *et* $b \# 0$.

Proposition 5:

$\geq$ est un préordre sur l'anneau **A** compatible avec la structure.

Proposition 6:

si x est nilpotent, *alors* $0 \leq x \leq 0$.

Proposition 7:

si $y \geq x > 0$ *ou* $y > x \geq 0$ *alors* $y > 0$.

Proposition 8:

si $0 \leq x \leq 0$, *alors pour tout* y, $0 \leq x.y \leq 0$,

ce qui veut dire que tout produit avec un nilpotent donne un nilpotent.

Proposition 9:

si $x \# 0$ *alors* $x^2 > 0$

si $x^2 + y^2 = 0$ *alors* *non* $(x \# 0)$ et *non* $(y \# 0)$

Proposition 10:

si $x.y > 0$ *alors* $x < 0$ *et* $y < 0$ *ou* $x > 0$ *et* $y > 0$.

si $x.y < 0$ *alors* $x > 0$ *et* $y < 0$ *ou* $x < 0$ *et* $y > 0$.

Proposition 11:

Soit $y > 0$: $x > -y$ *ou* $x > y$ *ssi* $x^2 > y^2$.

Proposition 12:

si $x < 0$ *et* $x+y > 0$ *alors* $y > 0$

si $x < y$ *alors* $x \# 0$ *ou* $y > 0$

si non $(x \# 0)$ *et* $y > 0$ *alors* $x+y > 0$

si $a < b$, *non* $(x \# 0)$ *et* $a < y < b$ *alors* $a < x+y < b$

$x^2 < a$ *ssi* $-a < x < a$.

Pour $a, b \in A$, on peut introduire les notions habituelles d'intervalle fermé $[a,b]$, ouvert à droite $[a,b)$, ouvert à gauche $(a,b]$, ouvert (a,b). Par exemple,

$$[a,b) = \{x \in A \mid a \leq x < b\} .$$

Ainsi, on peut voir l'anneau **A** de la façon suivante:

$$A=(-\infty,\infty)=\{x \in A \mid \exists y_1 y_2 \text{ , } y_1<x<y_2\}$$

parce que

$$x - 1 < x < x + 1$$

D'après la proposition 5, les nilpotents sont inclus dans $[0,0]$. L'intervalle $[0,0]$ peut donc être pensé comme un voisinage infinitésimal de **0**.
Cela comporte que

$$[0,1] = \{ x \in A \mid 0 \leq x \leq 1\}$$

contient *tous* les nilpotents.

Remarques:

i) puisque $\geq$ est un préordre compatible avec la structure d'anneau, (Proposition 5), on a que *pour toute* intervalle $I \subseteq A$, *pour tout* $d \in D$, *si* $x \in I$ *alors* $x+d \in I$.
Cela sera important pour notre notion de dérivée.

En outre, *si* $d \in D$, *si non* $(d = 0)$,

$$[a,b] = [a,b+d] = [a+d,b] = [a+d,b+d].$$

ii) à partir de la définition de la relation # on a que, pour tout $d \in D$,
$y \# y + d$ *ssi* $y - y + d \# 0$,

car $0 \leq d \leq 0$ implique, par la compatibilité avec les opérations de l'anneau, que $0 + y \leq y + d \leq y + 0$, pour tout y;

mais **d** n'est pas à part de zéro, donc $y \geq y + d \geq y$.

iii) on n'a pas de tricotomie, même avec $\geq$.

iv) *non si* $x \leq y$ *et* $y \leq x$ *alors* $x = y$, signifie *non* $(x \# y)$

v) *non si* $x \leq y$ *alors* $x \leq y$ *ou* $x = y$, il suffit que *non* $(x \# y)$ pour avoir d'autres cas.

Jusqu'ici on a vu quelques particularités opérationnelles des nilpotents de l'anneau **A**. Maintenant on introduit l'axiome qui leur donne aussi leur sens, c'est-à-dire la possibilité d'identifier des portions "petites" des courbes avec des droites.

Anneau de type ligne

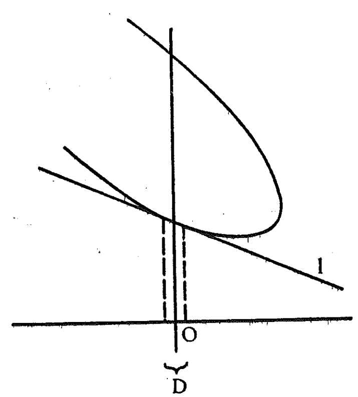
Axiome L:

Si l est la fonction $A{\times}A \to A^D$ qui associe à chaque couple (a,b) d'éléments de **A** un petit segment de droite (a + bd), l est un isomorphisme.
Autrement dit, pour toute petite droite (a + bd) définie pour tout **d** on peut remonter à **a,b**. Un anneau qui satisfait cette propriété est dit "de type ligne": en effet, l'axiome signifie que **D** est tellement petit que n'importe quelle fonction définie sur **D** est linéaire, et que, d'autre part, **D** est suffisamment grand pour identifier univoquement une droite, étant donné un de ses éléments **d**.

Kock[27] propose de voir géométriquement cet axiome de la façon suivante: si g est une fonction quelconque de **D** à **A**, et l'axiome dit qu'il y a un unique b ∈ A tel que

pour tout D , g(d) = g(0) + d.b

l'axiome exprime que le graphe de **g** est un segment d'une unique droite, c'est-à-dire celle qui passe par (0,g(0)) et avec la pente **b**. Ce qui peut se représenter par



[27] A.Kock [147], commentaire à l'axiome 1.

où g est étendue de son domaine de définition **D** à un ensemble plus grand, pour permettre de visualiser la droite.

On peut démontrer deux corollaires de cet axiome.

Corollaire L1:

non pour tout d ∈ D, d = 0 .

Pour le démontrer, il faut rappeler que la positive conduit à une contradiction avec **L**, parce que tous les couples auraient la même image, dont en particulier (0,1) et (0,0). En continuant dans le raisonnement classique, on peut donc affirmer que

il existe d ∈ D *tel que non* (d = 0)

Cependant, rien de cela ne peut être conclu dans une logique intuitionniste. Donc, l'axiome **L** nous rassure sur le fait que **D** ne se réduit pas au seul zéro.

On peut par contre démontrer sans problèmes le corollaire suivant.

Corollaire L2:

Si x , y ∈ A , *si* x.d = y.d *pour tout* d ∈ D , alors x = y

Démonstration:

L'hypothèse dit que *pour tout* d ∈ D , la fonction f: D → A définie comme $d \mapsto x.d-y.d$ est constante, avec f(d) = 0. Mais on peut voir cette fonction comme la droite 0 + (x − y) d . Donc, par l'axiome **L** il y a un seul couple (a,b) qui lui correspond et, à cause de l'isomorphisme, il s'agit du zéro de l'anneau, c'est-à-dire de (0,0). Donc il faut que x − y = 0 = b, ce qui veut dire que x = y . Q.E.D.

Le sens de ce corollaire est que l'on peut "effacer" les "infiniment petits" quantifiés universellement. Cela, on peut remarquer, en contraste avec les infinitésimaux de l'analyse non standard de Robinson, qui peuvent être effacés individuellement.

La Dérivée

L'axiome **L** garantit l'existence de l'inverse de la fonction *l*. Il s'agit donc de la comprendre.

Soit $f{:}A \to A$ une fonction quelconque. Alors, pour $x \in A$,

$f(x + *)$ est une fonction de **D** dans **A**, et il existe, par l'axiome **L**, l'unique couple $a,b \in A$ tel que pour tout $d \in D$ $f(x + d) = a + bd$. Puisque on a déjà, d'après l'axiome **L**, que $f(x) = a$, on affirme que qu'il existe un unique $b \in A$ tel que

$$\textit{pour tout}\ \ d \in D, \quad f(x + d) = f(x) + bd,$$

ce qui veut dire qu'il existe une seule droite qui coïncide avec **f** dans le voisinage infinitésimal de **x**. On définit alors la dérivée au point **x** comme cet unique **b**. Plus précisément, on écrit

$$f(x+d)=f(x)+f'(x)d$$

où $f'(x)$ est appelée la dérivée de **f**, et est une fonction de **A** à **A**.

Ceci est en accord avec l'intuition de la géométrie analytique, parce que **b** indique la pente de la droite.

Autrement dit, $f'(x)$ peut être définie comme l'unique élément de **D** tel que la formule de Taylor suivante est vraie:

$$f(x+d)=f(x)+d\,f'(x)$$

Du point de vue des fondements, dans le sens spécifié plus haut, cette définition de la dérivée a deux conséquences particulièrement importantes. D'abord, elle est définie sur toute fonction de l'univers milieu, c'est-à-dire, on affirme que toute fonction a une dérivée: en effet, la théorie est pensée pour les morphismes lisses entre des espaces lisses. En outre, la théorie proprement dite commence justement avec l'axiome **L** et la définition de dérivée relative car la dérivée, en tant que pente, est vue par Lawvere comme la "decisive abstract general relation" du calcul différentiel.

4. Le rapport conceptuel à la méthode de Fermat

Cette définition de dérivée peut être employée de la façon habituelle pour la détermination des tangentes et des extrêma. Cela formellement: si par contre nous voulons donner une justification intuitive, et si nous voulions résoudre la question proposée par Fermat, trouver le maximum de $bx^2 - x^3$, il s'agirait simplement de poser $f(x+d)=f(x)+f'(x)d$ et ensuite, $f'(x)=0$. C'est-à-dire

$$f(x + d) = bx^2 - x^3 + 2bxd - 3x^2d + bd^2 - 3xd^2 - d^3$$

Puisque nous savons que $d^2 = 0$, nous pouvons réduire l'équation à

$$f(x + d) = bx^2 - x^3 + (2bx - 3x^2)\,d$$

mais l'axiome **L** s'applique à cette équation, c'est-à-dire qu'il y a une seule fonction telle que l'équation soit vraie. Puisque nous voulons que, en tout cas, $f(x + d) > f(x)$, tout dépend de la valeur du coefficient de d , et on l'annulera. Cela nous donne

$$2bx - 3x = 0$$

Non seulement ceci est le résultat qu'a obtenu Fermat, mais cette équation est aussi obtenue par un procédé semblable, en vertu de l'introduction de la quantité **e** ou **d**. En effet, cette quantité, qui n'est définie que "proche" du maximum seulement, devait en quelque sens être conçue par Fermat comme "petite" puisqu'il n'hésitait pas à supprimer les termes du développement contenant des puissances de **e**. On voudrait pouvoir affirmer que Fermat était conscient de certaines propriétés des *nilpotents* ou qu'il concevait l'aspect géométrique de ces problèmes de façon semblable à (ou différente de) la nôtre. Bien entendu, cela n'est pas possible, puisque les seules indications que nous possédons à cet égard sont les phrases célèbres de la ***Methodus*** et de la ***lettre à Brûlart***[28]. Cependant, nous pouvons affirmer que l'idée géométrique derrière le raisonnement donné ici est très proche de celui de la lettre à Brûlart, où, comme on l'a vu, Fermat prenne en considération tant le développement de $f(a+e)$ que celui de $f(a-e)$. Cela est d'autant plus important que nous avons à plusieurs reprises pris ce texte comme l'explication principale de la *méthode*.

On doit cependant souligner d'autres éléments de la question dans les termes connus au temps de Fermat. D'abord, les problèmes de maxima et

[28] Dans la ***Methodus***, à propos du produit maximum de deux segments dont on connait la "somme": "si au lieu de l'aire Z, on en prend une autre plus grande, quoique toujours inférieure à B/4, les segments A et E différeront moins entre eux que les précédents, les points de division se rapprochant davantage du point constitutif du produit maximum, et toujours le produit des segments augmentera de plus en plus, tandis que la différence entre A et E diminuera, jusqu'à ce qu'elle s'évanouisse tout à fait pour le produit maximum; dans ce cas, il n'atteindra qu'une solution *monaché* ou unique, et les deux quantités A et E deviendront égales." (O.F.I, pp.148–149). Quant à la lettre à Brûlart, que nous avons déjà analysée, on peut rappeler en particulier le passage suivant qui plus directement semble renvoyer à un argument implicite sur la petitesse de E: "Il faut donc, outre la précaution précédente, qui veut que A+E donne la mesme équation que A–E, en adiouter une autre, qui veut que, si A+E donne moins que A, A–E donne aussy moins que A, et pareillement, si A+E donne plus que A, A–E donne aussy plus que A". (O.F.V Suppl., p.123)

minima n'évoquaient pas des points critiques des courbes mais plutôt, à la manière d'Apollonius, des problèmes classiques d'isopérimétrie ou de section ou encore des propriétés de tangentes et de normales. L'idée de variations imperceptibles autour du point critique n'appartenait donc pas à l'intuition du problème même, comme il l'est pour nous. En outre, nous n'avons pas d'éléments pour conclure que Fermat visualisait ses problèmes de maxima et minima par des courbes, bien que ses travaux sur ces problèmes aient été développés en même temps que la géométrie analytique. Celui qui commença à exprimer par une image les problèmes de maxima et minima est, comme nous l'avons vu, Huygens.

Pour ce qui concerne la détermination des tangentes, la comparaison avec l'approche de la GDS est plus directe puisque le procédé de Fermat demande de considérer le point sur la courbe correspondant à l'accroissement non sur la courbe mais sur la tangente. Cela peut être interprété comme l'identification entre une portion de courbe et un segment de droite, ce qui correspond à l'axiome **L**.

Il y a aussi une autre façon de rapprocher la *méthode* de Fermat et la GDS, et précisément par le soi-disant "axiome de Fermat". A ma connaissance, cela a été explicité seulement par Gonzalo Reyes pendant des conférences en 1979, où il introduisait aussi les "anneaux de Fermat", c'est-à-dire ceux qui satisfont l'axiome suivant:

Axiome F

Pour toute fonction $f(x) \in C^\infty(R,R)$, il existe exactement une fonction *pente*, $f_1(x_1, x_2) \in C^\infty(R \times R, R)$ telle que:

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) \cdot f_1(x_1, x_2)$$

Il s'agit en effet d'une façon d'introduire la dérivée (l'on pose en effet $f'(x) = f(x,x)$ pour les fonctions lisses, en utilisant le fait que pour celles-ci

la fonction "pente" $f_1(x_1,x_2) = \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$

peut s'étendre à la diagonale[29].

Le rappel à Fermat est dû au fait que la version de l'***Analytica*** de la méthode de Fermat, en ce qui concerne la notation, procède de manière très semblable, sauf bien sûr la condition sur les fonctions (voir le premier chapitre). D'autre part, la double racine était aussi à l'origine de la méthode de Descartes, publiée dans le deuxième livre de la ***Géométrie***. On ne voudrait donc pas décider uniquement en faveur de Fermat, d'autant plus que, comme on l'a vu, les mathématiciens de son siècle ont attribué à Fermat plutôt la version de la ***Methodus***. Si d'autre part, comme Mahoney, on considère l'***Analytica*** non seulement comme l'origine de la méthode de Fermat, mais aussi comme sa version la plus représentative, alors ce n'est pas tant l'approche standard de la GDS mais plutôt celle-ci qui est sa descendante.

Une autre possibilité a été étudiée par Lawvere, toujours en rapport avec un "cours" de calcul différentiel et intégral. Lawvere a proposé de voir le maximum et le minimum de façon indépendante de la structure de préordre en **A**. Cette approche est encore fondée sur les propriétés des fonctions dans $C^{\infty}(R,R)$ qui sont au moins des "quadratiques". Malheureusement, nous ne pouvons pas développer ici cette présentation, qui sans doute rappelle plus de près l'approche de la théorie des équations du début du XVIIe siècle.

---

[29] Lawvere et Aurelio Carboni firent usage de cette approche dans un cours de "Calcul" en 1978. Reyes introduisit l'axiome de Fermat à la suite de conversations avec moi sur la version de l'***Analytica***, donc en relation directe avec le texte de Fermat, bien qu'il ait été au courant de la solution de Lawvere et Carboni. Récemment un étudiant de l'Istituto Matematico de Milan, Loris Biondo, a présenté une thèse sur les modèles de la GDS, dont l'appendice (pp.6–7) contient cette présentation de la dérivée, sans référence à Fermat. Je le remercie de m'avoir offert l'occasion de consulter sa thèse.

5. La GDS et les fondements

Un problème non négligeable du calcul différentiel de la GDS est que, tout comme son ancêtre la *méthode* de Fermat, il est "incohérent". Plus précisément, il n'y a pas d'interprétation cohérente de la GDS dans la catégorie des ensembles. Une autre façon de voir ce problème est que GDS est incompatible avec la loi du tiers exclu. Cela peut être facilement démontré par un argument classique (c'est-à-dire, employant le tiers exclu) de la façon suivante[30].

On définit une fonction $d: D \rightarrow A$ comme suit:

$$q(d) = 1 \quad si \quad d \neq 0$$

$$g(d) = 0 \quad si \quad d = 0$$

Alors, l'axiome **L** nous dit qu'il existe le couple $(a,b) \in A \times A$ tel que

$$g(d) = a + b \cdot d \quad \textit{pour tout} \quad d \in D .$$

Donc, pour $d = 0$, $g(d) = 0 = a + b.0$, d'où nous savons que $a = 0$, et pour tout $d = 0$

$$g(d) = 1 = 0 + bd$$

au carré

$$1 = b^2 d^2$$

c'est-à-dire $1 = 0$, contradiction.

---

[30] Cet argument est de Schanuel, selon le témoignage de Kock, 1981.

De cela on peut conclure que l'axiome **L** est incompatible avec les définitions par double alternative, fondées sur le tiers exclu. Cela ne décourage pas les mathématiciens travaillant dans les topoi, puisque la logique des topoi est intuitionniste. Quant à la présentation "naïve" de la GDS, elle peut continuer à faire référence aux ensembles, puisque les topoi sont des vrais univers, donc possèdent suffisamment de structure pour interpréter les opérations principales. Le seul *caveat* est d'éviter le tiers exclu, la *reductio ad absurdum* et l'axiome de choix (ou ses équivalents) dans les démonstrations.

De plus, l'incompatibilité de la GDS avec la logique classique et les ensembles va de pair avec la compatibilité par rapport à ce que Kock[31] appelle le "natural synthetic reasoning on smooth geometry", c'est-à-dire une approche qui est non idéaliste, selon la terminologie de Lawvere, du calcul infinitésimal.

D'autre part, cette incompatibilité souligne la spécificité de l'approche catégorielle et son rôle comme logique des mathématiques. En effet, le langage des catégories montre ainsi qu'il permet non seulement de parler de structures variables sans constructions *ad hoc* mais aussi de traiter directement des objets géométriques, sans réduction en termes numériques, comme on l'a indiqué dans les paragraphes précédents. Du point de vue de la théorie, cela est exprimé par le fait que l'objet **D** n'a pas d'éléments globaux sauf zéro, et pourtant il a des éléments, c'est-à-dire des éléments généralisés, au sens de Grothendieck: un élément de **D** doit être vu comme une flèche définie sur un objet quelconque (de notre catégorie des morphismes lisses). Cet objet est appelé le domaine de variation de **D**, parce qu'il établit les "stades" de variation de l'objet **D**[32]. On peut donc affirmer que la cohérence de la GDS est "sauvée" exclusivement par l'étude intrinsèque de la variabilité telle qu'obtenue par les topoi élémentaires. En

[31] Kock [147], p. 6.

[32] Voir, à ce propos, Kock [147], p.vii, ainsi que l'article ***Variable quantities and variable structures in topoi***, dans "Algebra, topology and category theory" (Heller A. et Tierney M. eds), New York 1976.

gros, la raison en est qu'il s'agit de propriétés locales qui sont forcément aplaties dans les ensembles "constants".

Si la GDS est cohérente dans les topoi, la *méthode* de Fermat l'est aussi. Interprétée comme une transcription, la GDS permet de reviser la *méthode* de Fermat comme une possibilité qui n'a pas été développée mais qui a été incorporée au calcul infinitésimal. D'autre part, nous savons que les fondements rigoureux de l'analyse, l'algèbre de Boole, l'arithmétisation et la théorie des ensembles peuvent être considérés comme appartenant au même processus, un processus de consciente réduction qui peut s'avérer non nécessaire. Avec ou sans matérialisme, il nous semble qu'adopter la logique intuitionniste pour l'univers-milieu (ou univers de discours), et considérer la structure selon les objets de la catégorie est une approche susceptible de nous informer davantage sur le fragment du monde étudié.

Ce dernier point est de grande importance pour notre comparaison car, dans le cas qui nous concerne, c'est justement grâce au fait que l'on ne se situe pas dans un univers de logique classique que nous pouvons admettre que, au niveau du petit, la droite et la courbe coïncident.

Cela nous conduit vers le rapport le plus profond entre la *méthode* de Fermat et l'approche de la GDS, et principalement sous les aspects suivants:

i) La *méthode* n'est pas contradictoire sous certaines conditions. Plus précisément, le soi-disant axiome de Fermat, origine et fondement de la *méthode*, est vrai pour les fonctions lisses. La spécificité de l'approche de la GDS est justement de mettre au centre de l'étude les fonctions lisses, avec les intuitions géométriques et les problèmes relatifs. Cela est le plus important point commun avec Fermat.

ii) Chez Fermat, la notion de nombre réel n'est pas accomplie, donc il n'y a pas de risque de réduction de la géométrie à la structure de corps, ni de subséquente arithmétisation de l'analyse: d'ailleurs, les critiques que Fermat reçut avaient plutôt à voir avec le style de présentation qu'avec l'usage de l'accroissement **e**, c'est-à-dire d'incohérence propre de la "métaphysique du calcul infinitésimal" (que l'on ne discuta qu'à la fin du XVIIe siècle).

iii) Il n'y avait pas, au stade de Fermat, de problème de rigueur. La façon de laquelle cela se présentait, était dans le sens de donner non seulement une analyse, mais aussi une synthèse, dans la démonstration géométrique en général, et dans les problèmes de quadrature en particulier. C'est dans ce domaine que les mathématiciens du XVIIe se comportaient un peu comme ceux du XXe pratiquant la GDS, c'est-à-dire que, se limitant à l'analyse, il se bornaient à démontrer sans usage de tiers exclu, parce qu'ils évitaient de passer par la méthode d'exhaustion d'Archimède.

iv) L'approche de Fermat devrait s'appeler géométrie algébrique (si ce terme ne conduisait pas à des équivoques), car en effet il travaillait sur ces problèmes uniquement du point de vue géométrique, en trouvant, le premier, les relations qui pouvaient être tranférées en équations, sans "esprit de système" algébrique pour justifier ses démarches. Et cela est en bonne partie ce que les auteurs de la GDS entendent par calcul différentiel.

v) Pareillement, les interprétations les plus récentes des axiomes de la GDS données par Lawvere (ce que Lawvere appelle le calcul des quantités pures) se rapprochent du calcul des longueurs de la *Logistica speciosa* de Viète et Fermat, qui imposait la loi d'homogénéité afin qu eles termes d'une équation gardent leur signification géométrique, leur dimension.

On peut conclure en affirmant que la GDS repropose les procédures du calcul différentiel et intégral avant leur transformation en algorithmes purement algébriques, et bien avant l'introduction de la rigueur en analyse. De ce fait, elle repropose la *méthode* de Fermat qui montre, plus que celle de Descartes, l'équilibre instable du raisonnement et de la notation algébriques qui reflètent une comparaison de figures.

CONCLUSION

Nous pouvons maintenant tirer quelques conclusions au sujet des deux questions que nous avons posées au début. La question théorique, c'est à dire le statut des procédures de Fermat en tant que méthode et la question historique de la diffusion et la tradition de la *méthode* de Fermat.

Quant au statut des procédures en tant que méthode, la conclusion de notre recherche est que nous pouvons prendre à la lettre les affirmations de Fermat, et considérer ses procédures comme une méthode. Plutôt, nous avons compris de quelle manière il faut les entendre comme une méthode. Ses procédures sont en effet la combinaison d'un *langage* (la logistique, c'est à dire les "notes" ou symboles et le contexte de la théorie des équations, dont la *syncrisis*) et d'une sorte particulière d'*argument* (l'*adaequatio*, appliquée pour la première fois à la théorie des équations à la Viète, et non plus aux seules équations particulières). Le domaine d'application de ces procédures est géométrique: il est constitué par tous les problèmes impliquant des *diorismòi*, des conditions ou points limites. Le langage et l'argument algébriques sont en effet mis en rapport avec un problème géométrique, leur but étant de représenter le problème ainsi que la comparaison de figures qui amène à sa solution.

La généralité de la *méthode* est donc limitée à ce domaine d'application, ce qui peut apparaître insatisfaisant, du moins à première vue, au lecteur moderne. Mais c'est la généralité que Fermat recherchait. Ainsi il résout non seulement les maxima et minima, mais aussi le problème de ***De locis planis*** d'Apollonius et les tangentes. Il obtint même des résultats inattendus, puisqu'il put appliquer ses procédures aux centres de gravité, car il conçut cette détermination en termes de *diorismòs*. Il s'agissait donc d'une méthode, et d'une méthode générale, par rapport aux problèmes avec *diorismòi* et aux courbes connues. En tant que *méthode*, elle représente une façon de voir globalement tous les problèmes concernés, de les voir en rapport et de concevoir en somme un nouveau domaine des mathématiques.

On peut convenir que ce domaine des mathématiques n'exista que pour quelques décennies, autrement dit que cette conception n'était avancée que par rapport au contexte des mathématiques après Viète, et que la génération suivante de mathématiciens, la génération de Huygens, abandonna bientôt ce point de vue. Cependant, les changements de perspective successifs dérivaient aussi de l'approche de Fermat et de sa vision d'ensemble. En effet, la *méthode* de Fermat fut interprétée dans toute son ampleur par deux auteurs qui travaillaient sur la portée universelle de l'algèbre, c'est-à-dire Pierre Hérigone et Frans van Schooten. Ces deux auteurs furent aussi les mathématiciens qui contribuèrent davantage à la diffusion de la *méthode* et eurent une grande influence sur la génération suivante, malgré les transformations rapides de la pratique et de l'univers mathématique.

Une bonne partie des éléments historiques de cet argument étaient disponibles, mais par ce travail j'espère avoir mis au jour d'autres éléments d'histoire et avoir donné des raisons pour une nouvelle interprétation de ces faits.

En effet, malgré la longue tradition d'historiens qui se sont occupés de la *méthode* de Fermat (tradition si étendue qu'elle pourrait constituer un sujet d'étude à elle seule), personne n'a voulu voir dans la *méthode* même de Fermat la justification de la variété de ses applications. Le premier fut Montucla, qui dans son ***Histoire des mathématiques*** écrivit:

> Avant même que Descartes publiât sa *Géométrie*, M. de Fermat étoit en possession de la plûpart de ses inventions les plus brillantes, comme ses méthodes *de maximis & minimis*, & des tangentes, sa construction des lieux solides, &c. On en tire la preuve de son commerce Epistolaire avec *Roberval*, imprimé à la suite de ses oeuvres.([62] II, 136)

Après avoir résumé les deux lettres à Roberval que nous avons vues au troisième chapitre et dans lesquelles Fermat donne la liste des questions résolues par la *méthode*, Montucla remarque:

> Il paroît par-là que M. de *Fermat* donnait assez improprement le nom de *maximis & minimis*, à sa méthode d'analyser les problêmes; car on aura de la peine à concevoir que la vrai méthode de ce nom puisse être de quelque usage dans plusieurs de ces questions.(ib. p.137)

Plus que ses autres découvertes, c'est la *méthode* de Fermat qui le rendit célèbre dans son siècle. Sur la *méthode*, le point de vue de Fermat était plus développé que celui de Descartes. En effet, non seulement la *méthode* de Fermat donne une procédure plus efficace mais elle représente une approche globale à un sujet en voie de constitution. On peut dire que Fermat a *inventé* ce sujet, puisque Descartes commença à s'en occuper après avoir entendu parler de résultats de Fermat, comme le repète Montucla lui-même.

A cela se rattache la réponse à la question historique, à savoir comment la *méthode* de Fermat s'est diffusée, dans quelle version et quel était son statut. A ce sujet, nous avons pu voir comment le ***Cursus mathematicus*** d'Hérigone a joué un rôle non seulement pour la diffusion mais pour la constitution de la forme canonique de la *méthode*. Le contexte même du ***Cursus mathematicus*** souligne l'affinité de perspective entre la *méthode* de Fermat, technique générale pour les problèmes des points limites fondée sur l'algèbre symbolique de Viète et l'approche générale aux mathématiques, et la *méthode* d'explication mais aussi de solution de problèmes, elle aussi fondée sur l'algèbre symbolique de Viète, proposée par Hérigone. Si ce fut la *méthode* qui rendit célèbre Fermat, ce fut Hérigone qui rendit célèbre la *méthode*. Cependant, la célébrité ne coïncide pas avec l'importance mathématique d'un résultat, mais la forme et le contexte particuliers dans lequels le résultat devient célèbre constituent une partie importante de ses possibilités d'application.

D'autre part, nous avons examiné quelques moments du développement de la tradition, de Van Schooten à Huygens, à partir de la *méthode* de Fermat. A travers cette tradition, la *méthode* se transforma mais devint aussi un résultat reconnu comme fondamental et même un point de départ pour le calcul infinitésimal.

L'autre aspect théorique de la recherche a été de prendre en considération le rapport conceptuel entre la géométrie différentielle synthétique et la *méthode* de Fermat. Cela peut se voir de plusieurs manières. D'abord en affirmant que Fermat, dans sa *méthode*, faisait usage de nilpotents et que telle était sa façon de concevoir les infiniment petits. A cet égard, la prudence historique empêche d'accepter ce point de vue, qui reste toutefois plausible, au moins dans les limites de la pensée de l'époque. Car d'abord on ne peut pas dire que Fermat avait une notion proprement dite d'infiniment petit "géométrique", donc les nilpotents ne sauraient devenir, dans sa pensée, des quantités avec un statut particulier. D'autre part, il est vrai que Fermat était prêt à négliger des termes quand il s'agissait de *diorismòi* ou points limites, et que bien entendu il développa aussi des techniques "intégrales" où la géométrie des infiniment petits était davantage mise en évidence, comme nous l'avons vu au sujet de Cavalieri. Fermat n'avait pas de terme pour désigner ses quantités "parfois négligeables", mais il avait un argument à employer dans des situations qui comportaient ces quantités.

Si l'on ne peut pas voir dans la *méthode* de Fermat un antécédent de quelques aspects de la Géométrie différentielle synthétique, on peut cependant remarquer que la définition de la dérivée que donne cette géométrie correspond à la notion suggérée par la *méthode* de Fermat, c'est à dire l'identification entre un portion de courbe et un segment de droite. Cela représente le rapport plus direct que la Geométrie différentielle synthétique admet avec le raisonnement naïf sur les infiniment petits. Plus précisément, la référence constante à la géométrie, l'identification entre la droite et la courbe et le manque d'"esprit de système" algébrique (jusqu'à renoncer au tiers exclu) semblent constituer l'affinité la plus significative et profonde entre le traitement des *diorismòi* par Fermat et l'approche du calcul infinitésimal par la Géométrie différentielle synthétique.

Nous tenons à préciser pourquoi nous n'avons pas traité, dans le cadre de cette étude, les autres "méthodes" de Fermat, et notamment la méthode de descente infinie, ou la méthode pour le calcul des probabilités, car dans ses lettres Fermat les évoque aussi comme étant "sa méthode". Il en est de même pour les méthodes de quadrature, qui ont des rapports avec les déterminations des tangentes et aussi du centre de gravité des conoïdes. La raison en est que, d'après l'examen des textes, il convient d'attribuer une signification générale au terme méthode. En employant ce terme, Fermat semble penser tout simplement au fait qu'il a apporté une solution au problème posé, et peut-être à la classe de problèmes posés. Aussi, il ne s'agit là ni d'un quasi-algorithme comme dans le cas de l'*adaequatio*, ni d'un

groupe de problèmes comme ceux des *diorismòi* ou points limites. La vision globale de la *méthode* appartient à la première phase de la pensée de Fermat qui se situe autour de 1629, lorsqu'il élaborait une géométrie analytique, et se consacrait à l'étude de nouvelles classes de problèmes indéterminés et aux problèmes des *diorismòi*. L'idée de la *méthode* est donc peut-être un idéal qui semblait se réaliser à un certain moment, et correspond à la conscience d'avoir découvert de nouvelles voies pour le programme de Viète: ***nullum non problema solvere***.

Remerciements

Je veux exprimer ici ma gratitude pour prof. Kirsti Andersen, historienne des mathématiques à l'Université de Aarhus, Danemark, pour la passion et la patience avec lesquelles elle a suivi mes premiers pas dans ce sujet, et pour nos longues conversations sur Fermat. Je remercie aussi mes deux directeurs de thèse à l'Université de Montréal, prof. Gonzalo Reyes et prof. Yvon Gauthier, ainsi que prof. Louis Charbonneau, Montréal, prof Daniel Roche et prof. Ernest Coumet, Paris. Je remercie prof. Michael S. Mahoney, pour son enseignement des mathématiques de Fermat et du XVIIe siècle à l'Université de Princeton. Prof. Henk Bos, de l'Université de Utrecht a lu mon texte et m'a offert ses commentaires, exceptionnellement savants et amicaux. Je remercie ceux parmi mes amis qui, en tant qu'interlocuteurs, m'ont aidée avec compétence et générosité à terminer ce livre: en particulier Catherine Goldstein et Michel Blay, chercheurs au C.N.R.S., Paris, ainsi que Dr. Liliane Beaulieu, Montréal. Je remercie enfin mes lecteurs Italiens, qui ont vu des ébauches de ce travail, comme prof. Massimo Galuzzi, prof. Gianni Micheli, prof. Giambattista Gori et prof. Massimo Mugnai. Les mérites typographiques de ce texte dépendent de l'assistance de la "Wordperfect Italia" et de la conception graphique de Dr. Peter A. Meyers.

INDEX DES NOMS CITES

Bibliographie

Sources principales:

[1] Fermat P. ***Varia opera mathematica D. Petri de Fermat Senatoris Tolosani***, (éd. S. de Fermat) Toulouse 1679; reimprimé à Berlin en 1861 et à Bruxelles en 1969

[2] Henry C. et Tannery P.(éd.), ***Oeuvres de Fermat*** 4 tomes, Paris 1891–1912, avec supplément par De Waard C., Paris 1922

en outre:

[3] Apollonii Pergae ***Conicorum libri quattuor, una cum Pappi Alexandrini lemmatibus, et commentariis Eutocii Ascalonitae ... quae omnia nuper Federicus Commandinus Urbinas e Graeco convertit***, Bononiae 1566

[4] Archimède ***Oeuvres d'Archimède***, (éd. Mugler), Paris 1970–72

[4bis] Archimedis ***Opera nonnulla a Federico Commandino Urbinate nuper in latinum conversa et commentariis illustrata***, Venetiis 1558

[5] Beaugrand J. de (éd.) ***In Artem analyticen isagoge. Ad logisticam speciosam notae priores*** <de Viète>, Paris 1631

[6] Bert P. ***Breviarium totius orbium terrarum***, Parisiis 1624

[7] Bert P. ***Geographia vetus ex antiquis et melioribus nota scriptoribus***, Parisiis 1628

[8] Biancani G. ***Aristotelis loca mathematica***, Bononiae 1615

[9] Billy, J. de *Abrégé des préceptes d'algèbre*, Reims 1637

[10] Bombelli R. *L'algebra*, Bologna 1572; prima edizione integrale (éd. E. Bortolotti), Milano 1966

[11] Borrel J. *Logistica*, Lugduni 1559

[12] Cavalieri B. *Geometria indivisibilibus nova quadam ratione promota*, Bononiae 1635, Bononiae 1653

[13] Cavalieri B. *Exercitationes geometricae sex*, Bononiae 1647

[14] Clavius C. *Opera mathematica*, Maguntiae 1611–1612

[15] Commandinus F. *Liber de centro gravitatis solidorum*, Bononiae 1565

[16] Dasypodius K.– Herlinus C. *Analyseis geometricae sex librorum Euclidis*, Argentorati, 1566

[17] Debeaune (de Beaune) F. *In Geometriam Renati Descartes notae breves*, voir [20] et [21]

[18] De Coste H. *La vie du R.P. Marin Mersenne Theologien, Philosophe et Mathematicien de l'Ordre des Peres Minimes*, Paris 1649

[19] Desargues G. *Oeuvres de Desargues*, (éd. N. Poudra), Paris 1864

[20] Descartes R. *Geometria à Renato Descartes anno 1637 Gallice edita, nunc autem cum notis Florimondi de Beaune in linguam Latinam versa et commentariis illustrata opera atque studio Francisci à Schooten*, Lugduni Batavorum 1649

[21] Descartes R. *Geometria à Renato Descartes anno 1637 Gallice edita; postea autem una cum notis Florimondi De Beaune Gallice conscriptis in Latinam linguam versa; et commentariis illustrata, opera atque studio Francisci à Schooten. Nunc demum ab eodem diligenter recognita, locupletioribus commentariis istructa*, Amstelodami 1659–1661

[22] Descartes R. *Oeuvres de Descartes*, (éd. Adam C. et Tannery P.), Paris 1897–1913, avec la *Correspondance* (éd. Adam C. et Milhaud G.), Paris IIe ed. 1964–1974

[23] Diophanti Alexandrini *Rerum Arithmeticarum libri sex, quorum duo adjecta habent scholia Maximi Planudis, item liber de numeris polygonis seu multangulis*, (a Xylandro), Basileae 1575

[24] Diophanti Alexandrini *Arithmeticorum libri sex, et de numeris multangulis liber unus*,(a Bacheto), Parisiis, 1621

[25] Diophanti Alexandrini *Arithmeticorum libri sex et de numeris multangulis liber unus. Cum commentariis C. G. Bacheti V. C. et cum observationibus D. P. de Fermat Senatoris Tolosani* (a S. Fermatio), Tolosae 1670

[26] Durret N. *L'algèbre, effections géométriques et partie de l'éxégétique nombreuse de l'illustre F. Viète*, Paris 1644

[27] Du Val G. *Le Collège Royal de France*, Paris 1645

[28] Errard J. *La géometrie et practique generale d'icelle*, Paris, 1594

[29] Errard J. *La fortification reduicte en art et démonstrée*, Paris, 1600

[30] Euclidis *Elementorum libri XV una cum scolijs antiquis a Federico Commandino Urbinate nuper in Latinum conversi commentarijsque quibusdam illustrati*, Pisauri 1572

[31] Galileo G. *Opere*, (éd. Favaro), Firenze 1890–1909

[32] Gosselin G. *De Arte Magna*, Parisiis, 1577

[33] Guisnée M. *Observations sur les Méthodes de Maximis et Minimis, où l'on fait voir l'identité et la différence de celle de l'Analyse des Infiniment petits avec celles des MM.Fermat et Hudde*, "Mémoires de l'Académie Royale des Sciences", 1706

[34] Henrion D. (Cyriaque de Mangin, Clément) ***Traicté d'algèbre***, Paris 1620

[35] Hérigone P. ***Cursus mathematicus, nova brevi et clara methodo demonstratus, per notas reales et universales, citra usum cuiuscumque idiomatis intellectu faciles. Cours mathématique***, Parisiis 1634, 1642, 1644

[36] Hérigone P. ***Les six premiers livres des elements d'Euclide demonstrez par Notes***, Parisiis, 1644

[37] Huygens Ch. ***Oeuvres complètes***, publiées par la Société Hollandaise des Sciences, Amsterdam 1888, La Haye 1950

[38] Kepler J. ***Stereometria doliorum vinariorum*** (Lincii 1615), dans: J. K. ***Gesammelte Werke***, t.IX, (ed. F. Hammer), München 1960

[39] Lacroix S. F. ***Traité du calcul différentiel et du calcul intégral***, Paris 1810–1819

[40] Lagrange J.L. ***Oeuvres de Lagrange***, (éd. J.A. Serret) Paris 1867–92, t.IX: ***Théorie des fonctions analytiques***, t.X: ***Leçons sur le calcul des fonctions***, réimprimé, Hildesheim, 1973

[41] Laplace P.S. ***Théorie analytique des probabilités***, Paris 1812

[42] La Ramée P. (Petri Rami) ***Scholarum mathematicarum libri unum et triginta***, Basileae 1569

[43] Leibniz G.W. ***Die philosophischen Schriften*** (éd. Gerhardt), Berlin 1880, Hildesheim 1960

[44] Mersenne M. ***Correspondance du P. Marin Mersenne***, Paris 1933–1986

[45] Newton I. ***The mathematical papers of Isaac Newton***, (éd. Whiteside D.T. et Hoskin M.A.), Cambridge 1967

[46] Oughtred W. ***Arithmeticae in numeribus et speciebus institutio***, London 1631, réimprimée dix fois, jusqu'en 1792

[47] Pappi Alexandrini ***Mathematicae Collectiones a Federico Commandino Urbinate in Latinum conversae et commentarijs illustratae***, Pisauri 1588

[48] Pappi Alexandrini ***Collectiones quae supersunt e libris manu scriptis edidit, latina interpretatione et commentariis instruxit***, F. Hultsch, Berolini 1876–1878

[49] Pascal B. ***Oeuvres complètes***, Paris 1963

[50] Procli Diadochi Lycii philosophi platonici ac mathematici probatissimi ***In primum Euclidis Elementorum librum Commentariorum ad universam mathematicam disciplinam principium eruditionis tradentium libri IIII. A Francisco Barocio patricio veneto summa opera, ac diligentia cunctis mendis expurgati***, Patavii 1560

[51] Renaudot E. ***Centurie des questions traitées ez conférences du Bureau d'adresse***, Paris 1641

[52] Stevin S. ***L'arithmetique***, Leyde 1585, réimprimé dans ***The principal works of Simon Stevin***, (éd. D. J. Struik), t.II B Amsterdam 1958

[53] Stevin S. ***Hyponemnata mathematica***, Lugduni Batavorum 1606

[54] Torricelli E. ***Opere*** (éd. Loria G. et Vassura G.), Faenza 1919–1944

[55] Tapp J. ***The pathway to knowledge***, London 1613

[56] Valerio L. ***De centro gravitatis solidorum libri tres***, Bononiae 1661

[57] Vasset A. ***L'algèbre nouvelle de M.Viète***, Paris 1930

[58] Vaulezard J.L. ***Introduction en l'art analytic ou nouvelle algèbre de François Viète*** Paris 1630. Réimprimé dans ***Corpus***, Paris 1986

[59] Vaulezard J.L. ***Examen de la traduction faicte par Antoine Vasset***, Paris 1631

[60] Viète F. ***In Artem analyticen Isagoge***, Turoni 1591

[61] Vietae Francisci *Opera mathematica* (a Schotenio), Lugduni Batavorum 1646

Au sujet de Fermat avec référence à sa méthode, en ordre chronologique:

[62] Montucla J.E. ***Histoire des mathématiques***, Paris 1776

[63] Genty (abbé) ***Influence de Fermat sur son siècle***, Toulouse 1784

[64] Libri M. ***Fermat***, "Revue des deux mondes", 1845

[65] Brassinne E. ***Précis des oeuvres de Fermat***, Toulouse 1853, réimprimé Paris 1989

[66] Duhamel J.-M. C. ***Mémoires sur la méthode des maxima et minima de Fermat, et sur les méthodes des tangentes de Fermat et Descartes***, "Mémoires de l'Académie des Sciences" 32, Paris 1864, pp. 269–392

[67] Henry C. ***Recherches sur les manuscrits de Pierre de Fermat***, Roma 1880

[68] Chartres R. ***Note on a problem in maxima and minima***, "Nature" 37, 1887-88, p. 320

[69] Vivanti G. ***Il concetto di infinitesimo e la sua applicazione alla matematica***, Mantova 1894

[70] Wieleitner H. ***Bemerkungen zu Fermats Methode der Aufsuchung von Extremwerten und der Bestimmung von Kurventangenten***, "Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung", 38, 1929, pp. 24-35.

[71] Itard J. ***Fermat précurseur du calcul différentiel***, "Archives Internationales d'Histoire des sciences", 4, 1948 (réimprimé dans [75] pp. 235–256)

[72] Itard J. ***Les méthodes utilisées par Fermat en théorie des Nombres***, "Revue d'Histoire des Sciences", 3, 1949 (réimprimé dans [75] pp. 229–234)

[73] Itard J. ***Pierre Fermat***, "Revue de mathématiques élémentaires" (Elemente der Mathematik) Beih. Nr 10, Sept. 1950 (réimprimé dans [75] pp. 206–228)

[74] Itard J. ***La lettre de Torricelli à Roberval d'octobre 1643***, "Revue d'histoire des sciences" t.XXVIII/2, 1975, pp. 114–124 (réimprimé dans [75])

[75] Itard J. ***Essais d'histoire de mathématiques***, Paris 1984

[76] Hofmann J.E. ***Über ein Extremwertproblem des Apollonios ind seine Behandlung bei Fermat***, "Nova Acta Leopoldina", N.F., 27, 1963, 105–113

[77] Hofmann J.E. ***Pierre Fermat – ein Pionier der neuen Mathematik***, "Praxis der Mathematik", 7, 1965, pp. 113–119

[78] Bachmakova I. ***Diophante et Fermat***, "Revue d'histoire des sciences", 19, 1966, pp. 289–306

[79] Stromholm P. ***Fermat's method of maxima and minima and of tangents. A reconstruction***, "Archive for History of Exact Sciences" 5, 1968/9, pp. 47–69

[80] Jensen C. ***Pierre Fermat's method of determining tangents of curves and its applications to the conchoid and the quadratrix***, "Centaurus" 14, 1969, pp.72–88

[81] Schneider I. ***Descartes' Diskussion der Fermatschen Extremwertmethode – ein Stück Ideengeschichte der Mathematik*** "Archive for History of Exact Sciences", 7, 1970–71, pp. 354–374

[82] Mahoney M.S. ***The mathematical career of Pierre de Fermat***, Princeton 1973

[83] Moller Pedersen K. ***Techniques of the Calculus***, dans Grattan Guinness (ed.), "From Calculus to Set Theory", London 1980

[84] Andersen K. ***The mathematical technique in Fermat's deduction of the law of refraction***, "Historia Mathematica" vol.10, 1, 1983, pp. 48–62

Autres ouvrages cités:

[85] Andersen K. ***Cavalieri's Method of Indivisibles***, "Archive for History of Exact Sciences" vol. 31, 1985

[86] Baron M. ***The origins of infinitesimal calculus***, Oxford 1969

[87] Bockstaele P. ***La théorie des tangentes aux courbes algebriques dans l'oeuvre de René-François De Sluse***, Bulletin de la Societé Royale des Sciences de Liège, 1, 1986, pp. 135–144

[88] Boncompagni B. (éd.) ***Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche***, 2, 1869

[89] Bos H. ***On the representation of curves in Descartes' Géométrie***, "Archive for History of Exact Sciences" 24, 4, 1981

[89a] ***Arguments on motivation in the rise and decline of a mathematical theory: the 'construction of equations', 1637–ca.1750*** "Archive for History of Exact Sciences" 30, 3/4, 1984

[90] Boyer C. ***History of mathematics***, New York 1968

[91] Cajori F. ***A history of mathematical notation***, Chicago 1928

[92] Chrisman M. ***Lay culture, learned culture***, Yale 1982

[93] Cifoletti G.C. ***Quaestio sive aequatio, la nozione di problema nelle 'Regulae'***, Istituto Universitario Europeo, Working Paper 89/397, San Domenico di Fiesole, 1989

[94] Costabel P. ***Démarches originales de Descartes savant***, Paris 1982

[95] Crapulli G. ***Mathesis universalis***, Roma 1969

[96] Davis N. ***Society and culture in early modern France***, Berkeley 1975

[97] Davis N. ***Mathematicians in the Sixteenth Century French Academies: Some further Evidence***, "Renaissance news" XI, 1958

[98] Desan P. ***Naissance de la méthode***, Paris 1987

[99] D'Elia A. ***Christian Huygens, una biografia intellettuale***, Milano 1985

[100] Eisenstein E. ***The printing press as an agent of change: communication and cultural transformation in early modern Europe***, Cambridge 1979

[101] Gaukroger S. (éd.) ***Descartes: philosophy, mathematics and physics***, Brighton 1980

[102] Gilbert N. ***Renaissance concepts of method***, New York 1960

[103] Gillispie C.C. (éd.) ***Dictionary of scientific biography***, New York 1970–1980

[104] Giusti E. ***Le problème des tangentes de Descartes à Leibniz***, dans "Studia Leibnitiana", Sonderheft 14: 3OO Jahre "Nova Methodus" von G. W. Leibniz (1684–1984)

[105] Giusti E. ***Bonaventura Cavalieri and the method of indivisibles***, Bologna 1980

[106] Goldstein C. ***Algebra in der Zahlentheorie von Fermat bis Lagrange***, dans G. Scholtz, "Geschichte der Algebra", à paraître

[107] Grosholz E. R. ***Descartes' unification of algebra and geometry***, dans [101], pp.156–168

[108] Hintikka J.–Remes U. ***The method of analysis***, Dordrecht 1974

[109] Jardine L. ***Francis Bacon: discovery and the art of discourse***, London 1974

[110] Jardine N. ***The birth of history and philosophy of science, Kepler's 'A defence of Tycho against Ursus', with essays on its provenance and significance***, Cambridge 1984

[111] Klein J. ***Greek mathematical thought and the origins of algebra***, Cambridge Mass. 1968

[112] Mahoney M.S. ***The royal road***, Princeton dissertation 1967

[113] Mahoney M.S. ***Another look at Greek geometrical analysis***, "Archive for History of Exact Sciences" 1968

[114] Mahoney M.S. ***The beginnings of algebraic thought in the seventeenth century***, dans [101], pp.141–155

[115] Margolin J.C. ***L'enseignement des mathématiques en France (1540–1576)***, dans Sharratt (ed.) "French Renaissance Studies", Edinburgh 1976, pp. 109–155

[116] Marion J.-L. ***L'ontologie grise de Descartes***, Paris 1975

[117] Martin H.J. ***Livre, pouvoir et société à Paris au XVIIe siècle (1598–1701)***, Genève 1969

[118] Raymond P. ***La philosophie dans tous ses états***, dans Houzel C., Ovaert J.L., Raymond P., Sansuc J.J., "Philosophie et calcul de l'infini", Paris 1976

[119] Rider, R. E. ***A bibliography of early modern algebra: 1500–1800*** Berkeley 1982

[120] Sabra I. ***Theories of light from Descartes to Newton***, London 1967

[121] Sédillot C. ***Les professeurs de mathématiques et de physique au Collège de France***, dans [88]

[122] Schuster J. A. ***Mathesis universalis***, dans [101], pp. 41–96

[123] Tannery P. ***Mémoires scientifiques***, Toulouse–Paris 1912–1950

[124] Tropfke J. ***Geschichte der Elementar Mathematik***, Berlin–Leipzig 1924, Berlin–New York 1980

[125] Vasoli C. ***La dialettica e la retorica nell'umanesimo***, Milano 1968

[126] Whiteside D. T. ***Patterns of mathematical thought in the later seventeenth century***, "Archive for History of exact sciences", 1 1961

[127] Zeuthen H.G., ***Geschichte der Mathematik im 16 und 17 Jahrhundert***, Leipzig 1903

au sujet de la géométrie différentielle synthétique:

[128] Atiyah M.F. - MacDonald I.G. ***Introduction to commutative algebra***, 1969

[129] Bélair L. & Reyes G. ***Calcul infinitésimal en Géométrie différentielle synthétique***, "First symposium of Chilean mathematicians" Valparaiso 1981

[130] Bunge M. ***Models of differential algebra in the context of Synthetic differential geometry***, "Cahiers de Topol. et Géom. Différ." 22, 1981, pp. 31–44

[131] Bunge M. ***Synthetic aspects of C^∞ mappings***, "Journ. Pure and Appl. Alg." 28, 1983, pp. 41–63

[132] Demazure M. & Gabriel P. ***Groupes algébriques***, North Holland 1970

[133] Dubuc E. ***Sur les modèles de la géométrie différentielle synthétique***, "Cahiers de Topol. et Géom. Différ." 20, 1979, pp. 231–279

[134] Eilenberg S. & MacLane S. ***General Theory of Natural Equivalences***, "Transac. Am. Math. Soc." 58, 1949

[135] Gauthier Y. ***Intuitionistic logic and local mathematical theories***, Zeitschr. math Logik u. Grund. Math. 23, 1977

[136] Gauthier Y. ***Fondements des mathématiques: Introduction à une philosophie constructiviste***, Montréal 1978

[137] Grothendieck A. & J.Dieudonné ***Eléments de géométrie algébrique***, Springer Verlag 1971

[138] Joyal A. & Reyes G. ***Separable real closed local rings***, "Proc. of the Vth Symposium of Logic in Latin America" 1981

[139] Kan D. M. ***Adjoint Functors***, "Trans. Am. Math. Soc." 87, 1958, pp. 294–329

[140] Kock A. ***A simple axiomatic for differentiation***, "Math. Scand." 40, 1977

[141] Kock A. ***Taylor series for ring objects of line type***, "Journ. Pure Appl. Alg." 12, 1978, pp. 271–293

[142] Kock A. (ed) ***Topos theoretic methods in geometry***, Aarhus Math. Var. Publ. Series no. 30, 1979

[143] Kock A. ***Connections in formal differential geometry***, dans [142]

[144] Kock A. ***Formally real local rings, and infinitesimal stability***, dans [142]

[145] Kock A. ***Formal manifolds and synthetic theory of jet bundles*** "Cahiers de Topol. et Géom. Différ." 21, 1980, pp. 227-246

[146] Kock A. ***Properties of well adapted models for synthetic differential geometry*** "Journ. Pure Appl. Alg." 20, 1981, pp. 55–70

[147] Kock A. ***Synthetic Differential Geometry*** "London Math. Soc. Lec. Notes Ser." 51, Cambridge U.P. 1981

[148] Kock A. ***Models for synthetic integration theory***, "Math. Scand." 48, 1981

[149] Kock A. ***Introduction to synthetic differential geometry, and a synthetic theory of dislocations***, dans [158]

[150] Kock A. & Reyes G. ***Manifolds in formal differential geometry*** Proceedings "Applications of sheaves" Lecture Notes in Mathematics 753, Springer Verlag 1979

[151] Kock A., Reyes G. & Veit B. ***Forms and integration in synthetic differential geometry***, "Aarhus Preprint Series" No. 31, 1979/80

[152] Lawvere F. W. ***An elementary theory of the category of sets***, "Proc. Nat. Acad." U.S.A. 52, 1964, pp. 1506–1511

[153] Lawvere F. W. ***The category of categories as a foundation of mathematics***, "Proc. Conf. on Categorical Algebra (La Jolla 1965)" 1–20, New York 1966

[154] Lawvere F. W. ***Adjointness in Foundations***, "Dialectica" 23, 3/4, 1969

[155] Lawvere F. W. Appunti delle conferenze tenute a Milano nel 1977, redatte da Giovanna Cifoletti

[156] Lawvere F. W. ***Categorical dynamics***, dans [142]

[157] Lawvere F. W. ***Toward the description in a smooth topos of the dynamically possible motions and deformations of a continuous body***, "Cahiers de topol. et de géom. différ." 21, 1980

[158] Lawvere F. W. & Schanuel S. [ed.s] ***Categories in continuum physics***, Springer Verlag 1986

[159] Meloni G. & Casella A. ***Introduzione alle quantità pure con infinitesimi***, "Quaderni dell'Istituto Matematico" 42/S, Milano 1980

[160] MacLane S. ***Categories for the working mathematician***, Chicago 1971

[161] Penon J. ***Infinitésimaux et intuitionnisme***, "Cahiers de Topol. et Géom. différ." XXII-1, 1981

[162] Ngo Van Quê & Reyes G. ***Smooth functors and synthetic calculus*** "Proc. Brouwer Centenary Conference"

[163] Reyes G. ***Géometrie différentielle synthétique*** "Rapports de recherche Dept. de Math et de Stat." Université de Montréal 1980

[164] Reyes G. ***Synthetic reasoning and variable sets***, dans [158]

[165] Reyes G. ***Subtoposes of the ring classifier***, dans [142]

[166] Reyes G. & Moerdijk I. ***Models for smooth infinitesimal analysis***, Springer Verlag 1984

[167] Reyes G. & Wraith G. ***A note on tangent bundles in a category with a ring object***, "Math. Scand." 42, 1978, pp. 53-63

[168] Rogora E. ***Strutture categoriali per la fisica***, tesi di laurea dell'Istituto Matematico, Milano 1985

[169] Samuel P. ***On universal mappings and free homological groups*** "Bull. Am. Math. Soc." 54, 1948, pp. 591-598

[170] Weil A. ***Oeuvres Scientifiques - Collected Papers***, New York 1979, t.II (1951-1964)

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE II Extensions et applications de la *méthode*

CHAPITRE III La méthode de Fermat pour Fermat et ses contemporains

CHAPITRE IV La première publication: Hérigone

CHAPITRE V Après la diffusion: la tradition de la méthode de Fermat

CHAPITRE VI La géométrie différentielle synthétique et la méthode de Fermat

DERNIERS NUMEROS PARUS

N°24 - 1988 - *Vulgariser les sciences (1919-1939). Acteurs, projets, enjeux,* publié avec le concours de la Cité des Sciences et de l'Industrie, 109 p.

Ce Cahier contient les exposés de la Première Journée sur l'histoire de la diffusion et de la vulgarisation des sciences et des techniques (26 mars 1985, Cité des Sciences et de l'Industrie) : B. Bensaude-Vincent, C. Blondel, *Introduction* et *Deux stratégies divergentes de vulgarisation scientifique : Georges Claude et Paul Langevin* ; S. Poirot-Delpech, *L'Encyclopédie Française* ; A. Petit, *La diffusion des sciences comme souci philosophique : Bergson* ; P. Ory, *Front populaire et vulgarisation scientifique* ; J. Eidelman, *Politique de la science ou politique de l'Esprit ? Genèse du Palais de la Découverte* ; D. Pestre, *Les revues de vulgarisation scientifique en France, 1918-1940 : un panorama* ; D. Jacobi, C. Condé, *Un survol du contenu de* La Science et la Vie *entre 1913 et 1932* ; M. J. Nye, T. Shinn, *Postface.*

N°25 - 1988 - Jacques Gapaillard, *Le mouvement de la Terre. La détection de sa rotation par la chute des corps,* 179 p.

Cette étude retrace d'abord l'historique de l'idée d'une Terre en mouvement et souligne les problèmes posés par la démonstration de ce mouvement. Ce dernier étant conçu comme absolu, une difficulté apparaît quand on prend conscience du caractère essentiellement relatif de tout mouvement. L'aspect théorique de la détection de la rotation diurne de la Terre au moyen de la chute libre est ensuite examiné en détail. Cet examen permet en particulier d'expliquer une correction de Hooke à la conclusion de Newton, et met en lumière une faute de Gauss, commise après lui par beaucoup d'auteurs, et consistant à tirer des conséquences trop précises d'un calcul comportant des approximations.

N°26 - 1988 - Michel Saillard, *Histoire de la spectroscopie. De la théorie de la lumière et des couleurs de I. Newton (1672) à la découverte de l'effet Zeeman (1897),* 172 p.

Après les apports fondamentaux de Newton, cette étude relate en détail les difficultés rencontrées par les physiciens confrontés à des phénomènes lumineux inattendus. A travers une succession de théories spectroscopiques sans cesse remises en cause par des faits nouveaux, la fécondité des recherches qui aboutiront aux idées de Planck, est principalement marquée, pour la période étudiée, par la naissance de la spectrochimie et de l'astrophysique grâce aux travaux de Kirchhoff.

N° 27 - 1989 - *Les amateurs de sciences et de techniques.* Sous la direction de Yves Cohen et Jean-Marc Drouin, 190 p.

Ce cahier contient l'essentiel des communications présentées à la journée sur "Les amateurs de science", qui s'est tenue à la Cité des Sciences et de l'Industrie le 26 mai 1986. A travers des domaines aussi variés que, par exemple, les mathématiques, l'informatique, la T.S.F., l'astronomie et l'entomologie, ces articles soulignent le rôle joué par les amateurs dans le développement des sciences et des techniques, tout en s'efforçant de définr les différents types d'amateurs et leur statut vis-à-vis des scientifiques professionnels.

N° 28 - 1990 - Dominique Cardon, *Les "vers" du rouge. Insectes tinctoriaux (Homoptera : Coccoidea). Essai d'entomologie historique,* 178 p.

L'ouvrage, illustré de nombreuses reproductions de gravures anciennes et de huit planches en couleur, est le remarquable résultat du travail d'une historienne qui est aussi naturaliste. Elle a commenté et rassemblé les textes européens, arabes, persans et chinois qui décrivent la récolte et la préparation des insectes qui, surtout au Moyen Age, ont donné les plus beaux rouges (du cramoisi tiré de la cochenille d'Arménie ou kirmiz, au vermeil du kermès des teinturiers, en passant par le czerwiec de la cochenille de Pologne).

N° 29 - 1990 - *Le moteur hydraulique en France au XIX siècle : concepteurs, inventeurs et constructeurs.* B Belhoste, J.F. Belhoste, S. Benoit, C. Cartier, G. Dufresne, G. Emptoz, C. Fontanon, L. Lemaître. Avant-propos de Louis Bergeron. 317 p.

Ce sont les moteurs hydrauliques, dans leur matérialité et en dépit de la rareté des exemplaires conservés, qui suscitent dans cet ouvrage un éventail d'interrogations régressives à partir desquelles sont reconstruites toute une économie et toute une société d'acteurs solidaires de cette économie. Ce livre est au croisement de l'histoire des techniques et de l'histoire des sciences : il inaugure une nouvelle façon de parler des techniques.

N° 30 - 1990 - François Russo, *L'explication des mouvements des planètes, des Grecs à Kepler.* 275 p.

Cet ouvrage porte essentiellement sur la constitution et le développement de l'explication des mouvements des "planètes" par des cercles et des épicycles, théorie imaginée par Apollonius (III^{e} s. av. J.-C.) sous une forme plutôt qualitative, puis mettant en jeu des modèles et des calculs géométriques avec Hipparque (II^{e} s. av. J.-C.), et surtout avec Ptolémée (II^{e} s. ap. J.-C.). Par la suite cette théorie ne sera substantiellement modifiée ni par les astronomes arabes (IX^{e}-XV^{e} s.), ni par les astronomes occidentaux (XIII^{e}-XVI^{e} s.) y compris Copernic. Kepler lui-même y adhère un certain temps avant de l'abandonner définitivement pour lui substituer la loi des aires et les trajectoires elliptiques (Astronomia nova, 1609). En raison de son intérêt et de son unité, cette histoire méritait d'être retracée dans une vue d'ensemble et d'être rendue accessible à un public nettement plus large que celui des spécialistes de l'astronomie ancienne.

N° 31 - 1990 - *Les archives du Palais de la Découverte.* 120 p.

Ce Cahier est un catalogue descriptif des archives du Palais de la Découverte.

N° 32 - 1990 - Claude Brezinski, *Charles Hermite (1821-1901).* 92 p.

Charles Hermite fut un très grand mathématicien français. On peut même le considérer comme le père de l'analyse mathématique moderne. On lui doit de nombreux travaux sur les fonctions elliptiques, la théorie des nombres dans laquelle il introduisit l'usage de variables continues, les fractions continues et les approximants de Padé-Hermite, l'interpolation et les polynômes orthogonaux. C'est lui encore qui donna la première démonstration de la transcendance du nombre *e, base des logarithmes népériens, ouvrant ainsi la voie à celle de* π ce qui montrait l'impossibilité de la quadrature du cercle. Hermite eut aussi une grande