ANNO IX LUGLIO - DICEMBRE 1986 N. 3 - 4

FILOSOFIA OGGI

Il tempo è compiuto
ma non ancora consumato
M. F. SCIACCA

STUDIO EDITORIALE DI CULTURA - CASELLA POSTALE 997 - 16100 GENOVA (ITALY)

IL CALCOLO INFINITESIMALE E LA RICOSTRUZIONE DELLA SUA STORIA DA PARTE DI HEGEL

1. *Osservazioni introduttive*

Nella storia dei dibattiti metodologici sul calcolo infinitesimale Hegel prese una posizione specifica. Si sa che la logica del calcolo infinitesimale e lo statuto dei suoi concetti principali furono da sempre considerati un problema. Ancora negli anni in cui si pubblicava l'*Encyclopédie* l'insieme di questi problemi metodologici era definito come « la métaphysique du calcul infinitésimal » [1]. Fino a Langrange,

[1] Il calcolo infinitesimale si sviluppò e diffuse suscitando numerosi dibattiti sullo statuto delle sue nozioni, fin dalle sue origini, cioè dai « metodi » per massimo e minimo e tangenti, presentati da Fermat, Descartes, Roberval, o di quadratura mediante indivisibili di Keplero, Cavalieri, Fermat, Torricelli. Col processo di introduzione del trattamento algebrico delle quantità e problemi geometrici la nuova matematica comportò progressivamente una nuova ontologia, una diversa logica della dimostrazione, e il calcolo dell'infinito. I dibattiti si concentrarono soprattutto sull'ultimo aspetto, e in particolare sui differenziali di Leibniz e sulle flussioni e primi ed ultimi rapporti di Newton. Dopo le polemiche contemporanee ai due autori, *The Analyst* di George Berkeley ripropose piú radicalmente il problema del rigore del nuovo calcolo; gli rispose Colin Mac Laurin con il *Treatise of Fluxions* (1742). In esso egli si propose di costruire una « geometria delle flussioni », cioè un calcolo delle flussioni il cui rigore dimostrativo seguisse il modello euclideo. Alla fine del secolo, Lagrange assunse invece come programma una completa algebrizzazione del calcolo infinitesimale, realizzata nel trattato del 1797, il cui titolo, significativamente, è *Théorie des fonctions analytiques, contenant les principes du Calcul differentiel, dégagés de toute considération d'infiniment petits, d'évanouissements, de limites et de fluxions, et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies.*

Cfr. in particolare la seguente bibliografia: G. Berkeley, *The Analyst,* in *Works,* ed. di

« metafisica » significò, in questo contesto, solo il riferimento a princìpi filosofici, extramatematici; con lui, essa assunse il significato negativo, che prima era soltanto implicito, di mancanza di chiarezza matematica. Già Leibniz e Newton erano consapevoli delle questioni aperte dal nuovo calcolo e furono anzi i primi « metafisici » delle loro stesse teorie. Leibniz tentò di risolvere il problema dello statuto dei differenziali considerandoli nozioni ideali che abbreviano il ragionamento, e di risolvere la questione della logica del calcolo infinitesimale sostenendo che, al di là delle espressioni, le dimostrazioni usavano in realtà il metodo di esaustione, e proprio in questo senso De l'Hôpital scrisse il secondo assioma della sua *Analyse des infiniment petits* facendo riferimento all'idea che la circonferenza è il limite di poligoni. La posizione di Newton era meno fondata filosoficamente di quella di Leibniz: in altri termini, egli si occupava piú del contesto e dei risultati in aritmetica e cinematica che della legittimazione de concetti, ma si possono interpretare le nozioni che egli creò di volta in volta — flussioni, primi e ultimi rapporti, limi-

A. C. Fraser, 4 voll., Oxford 1901; L. N. M. Carnot, *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal,* Paris 1813[2]; J. D'Alembert, voci *différentiel, fonction, exhaustion, limite, fluxion, continuité, infini* in *Encyclopédie ou dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers,* Lausanne et Berne 1780-82; L. Euler, *Introductio in analysin infinitorum,* Lausanne 1748; P. Fermat, *Varia Opera Mathematica,* Toulouse 1679; G. G. F. Hegel, *Wissenschaft der Logik,* Faksimiledruk nach der Erstausgabe von 1812, Göttingen 1966 (trad. it. di A. Moni rivista da C. Cesa, Bari 1968); M. G. de l'Hôpital, *Traité des infiniment-petits pour l'intelligence des lignes courbes,* Paris 1696; J. L. Logrange, *Théorie des fonctions analytiques* (Paris 1797), in *Oeuvres de Lagrange* (M. J. A. Serret), t. IX, Paris 1881; Id., *Leçons sur le calcul des fonctions* (Paris 1808), t. X, ivi 1884; G. W. Leibniz, *Mémoire de G. L. touchant son sentiment sur le calcul différentiel,* in *Leibnitii Opera omnia* (L. Dutens), 1768, t. III; C. Mac Laurin, *A treatise of fluxions,* Edinburgh 1742; I. Newton, *Tractatus de quadratura curvarum,* London 1693. Sulla metafisica del calcolo infinitesimale e sulla sua trattazione in Hegel cfr. anche: H. Schwarz, *Versus einer Philosophie der Mathematik verbunden mit einer Kritik der Austellungen Hegels über den Zweck und die Natur der höheren Analysis,* Halle 1853; W. R., Smith, *Hegel and the Metaphysics of the Fluxional Calculus,* in « Transactions of the Royal Society of Edinburgh », XXV (1896); R. Baer, *Hegel und die Mathematik,* in « Verhandlungen des zweiten Hegelkongresses von 18 bis 21 Oktober 1931, Berlin-Tübingen 1932; G. B. Boyer, *The history of the Calculus and its conceptual development,* Dover 1949; M. Rehm, *Hegels spekulative Deutung der Infinitesimalrechnung,* Köln 1963; A. Doz, introduzione e note a G. G. F. Hegel, *La théorie de la mesure,* Paris 1970; D. Dubarle, A. Doz, *Logique et dialectique,* Paris 1972; E. Doumit, *Hegel et l'infinitésimal,* in AA.VV., *Les signes et leur interprétation,* Lille 1972; J. O. Fleckenstein, *Hegels Interpretation der Cavalierischen Infinitesimalmethode,* in « Hegel Studien », vol. suppl. XI, Bonn 1974; T. Pinker, *Hegel's Philosophy of Mathematics,* in « Philosophy and Phenomenological Research », vol. 41, 1980-81; R. Bodei, *Sistema ed epoca in Hegel,* Bologna 1975; J. T. Desanti, *La philosophie silencieuse,* Paris 1975; A. P. Youschkevitch, *The concept of function up to the middle of the 19th century,* in « Arch. Hist. Ex. Sci. », vol. XII (1976), pp. 37-85; Houzel-Ovaert-Raymond-Sansuc, *Philosophie et calcul de l'infini,* Paris, 1976; M. Galuzzi, A. Guerraggio, *Il calcolo differenziale nella scienza della logica di G. G. F. Hegel,* in « Epistemologia », a. II (1979), n. 2.

ti — come tentativi di una concettualizzazione soddisfacente. Hegel volle dunque inserirsi nel dibattito che aveva avuto luogo nei due secoli precedenti, con un contributo che consiste in due note, relative all'infinito quantitativo, nella *Scienza della Logica*[2], sezione « Quantità ». Significativamente in questa sezione è raccolta la maggior parte delle idee di Hegel sulla matematica e ben un terzo è dedicato al calcolo infinitesimale. Si può dunque porre la questione dell'importanza attribuita da Hegel a questo dibattito e quindi al ruolo del calcolo infinitesimale nell'ambito delle scienze esatte. Se si tiene poi conto del fatto che al tempo in cui Hegel scrisse le due edizioni della *Scienza della Logica* il calcolo infinitesimale attraversava quella fase della sua storia che segnò il passaggio da Lagrange a Cauchy, si pone anche il problema di quanto l'approccio filosofico di Hegel alla questione fosse matematicamente fondato ed aggiornato. Ci proponiamo pertanto la comprensione delle note di Hegel (I: « La determinatezza concettuale dell'infinito matematico »; II: « Lo scopo del calcolo differenziale dedotto dalla sua applicazione »), alla luce della sua conoscenza della storia del calcolo infinitesimale (che certamente include almeno la *Théorie des fonctions analytiques* di Lagrange, scritta nel 1797), e la determinazione degli aspetti logici ed ontologici che, secondo Hegel, caratterizzano il calcolo infinitesimale e gli conferiscono un ruolo centrale nella scienza.

2. *« Problemi fondazionali » del calcolo infinitesimale*

In che senso Hegel considerò i problemi metodologici del calcolo infinitesimale parte del suo lavoro filosofico? E come riformulò i problemi secondo il suo punto di vista? All'inizio della prima nota pose la questione in modo classico, simile, per esempio, a quello di Berkeley e di Carnot. Egli osserva che le giustificazioni in questo cam-

[2] È noto che Hegel scrisse due versioni della *Logica*: la prima pubblicata negli anni 1812-16, la seconda nel '32. La maggior parte dei cambiamenti riguarda la prima parte del testo, che comprende la sezione « Quantità » cui queste note appartengono. In particolare, solo la prima nota, « *La determinatezza concettuale dell'infinito matematico* », fu inclusa nella prima edizione. La seconda, invece, « *Lo scopo del calcolo differenziale dedotto dalla sua applicazione* » ed anche la nota annessa, « *Ancora altre forme connesse colla determinatezza qualitativa della grandezza* » (concernente Cavalieri), apparvero solo nella seconda edizione. Si ha perciò motivo di pensare che Hegel progredì nella sua indagine sul calcolo infinitesimale durante questi venti anni. Non ci sono invece elementi per concludere che, dopo aver studiato la storia del calcolo infinitesimale fino a Lagrange, Hegel giunse anche a leggere il suo contemporaneo Cauchy, che scrisse il suo *Cours d'Analyse* nel 1821. Al contrario, questo è molto improbabile, perché Hegel aveva l'abitudine di menzionare esplicitamente gli autori a cui si riferiva. Egli sembra invece essersi limitato a riguardare con maggior cura l'opera di Lagrange, includendovi probabilmente il trattato *Leçons sur le calcul des fonctions* (1799-1804), dove Lagrange mostrò maggiore precisione nel suo fondamentale teorema sullo sviluppo di Taylor, ed in generale riguardo ai problemi concernenti le serie in connessione con la sua definizione di derivata. Userò qui la traduzione italiana di A. Moni, rivista da C. Cesa (Bari 1968).

po della matematica si basano sull'esattezza dei risultati e non sulla chiarezza dell'argomento e dell'operazione mediante la quale essi vengono ottenuti, e si arriva perfino ad ammettere che l'operazione in se stessa è scorretta. In effetti, argomenta Hegel, la matematica va qui contro i suoi stessi princìpi, considerando, nelle operazioni, lo stesso incremento come una grandezza vera e propria e come uno zero (cfr. l'esempio di p. 455). Tale procedimento non è scientifico in quanto nella scienza la verità del risultato non giustifica di per sé il metodo usato, ed in particolare in matematica la dimostrazione è parte essenziale del discorso. Allo stesso modo la nozione di grandezza trascurabile non è accettabile, cosí come la nozione di approssimazione, poiché ci sono due conseguenze che si ripercuotono sullo sviluppo della matematica: « [...] la matematica, non conoscendo la natura di questo suo *strumento* (poiché non è venuta a capo della metafisica e critica di esso), non poté determinare l'estensione della sua applicazione, e mettersi al sicuro contro il suo cattivo uso » [3].

Infine, si nota che talvolta l'esattezza dei risultati viene verificata facendo appello ai metodi tradizionali, ma anzitutto questo non può applicarsi a tutti i risultati, e inoltre, « lo scopo per cui l'infinito viene introdotto non è l'abbreviare un percorso già noto ma raggiungere risultati a cui esso non poteva condurre ». Fin qui Hegel segue la critica classica e ha, rispetto a questa, solo il merito di prendere in considerazione delle vere difficoltà matematiche, che spesso venivano perse di vista nei dibattiti sullo statuto ontologico dell'infinitamente grande e dell'infinitamente piccolo. Passando poi ad un'analisi piú accurata, Hegel distingue tra i problemi matematici ed i problemi filosofici del calcolo infinitesimale, per giungere poi ad attribuire il ruolo centrale ai problemi matematici. Tradizionalmente, qui, il problema filosofico riguardava il senso dell'uso dell'infinito nel calcolo infinitesimale, se l'infinito è una nozione che appartiene tradizionalmente alla filosofia. Ma Hegel rovescia la questione argomentando nel modo seguente. La matematica, di per sé, tratta del finito. Il suo oggetto è il quanto, cioè il numero e la grandezza, e il quanto dipende dal « contare », ciò che ha senso solo relativamente al finito (oggetti, tempo, misura). Questo rende la presenza di nozioni come « infinitamente piccolo » e « infinitamente grande » insolita e fuori luogo in matematica.

Hegel scrive: « L'ordinaria determinazione dell'infinito matematico è che sia una grandezza al di là della quale, quando sia determinata come l'infinitamente grande, non se ne dia una maggiore, oppure, quando sia determinata come l'infinitamente piccolo, non se ne dia una minore; che sia cioè una grandezza la quale, nel primo caso, è maggiore, e nel secondo invece minore di qualsiasi grandezza assegnata. [...] Una grandezza vien definita in matematica come qualcosa che può essere aumentato e diminuito, epperò in generale come un limite indifferente. Ora in quanto l'infinitamente grande e l'infinitamente piccolo è tale che non può piú es-

[3] *Wissenschaft der Logik*, tr. it. cit., p. 264, corsivo nostro.

sere aumentato o diminuito, nel fatto stesso non è piú un quanto come tale » (*ib.*, p. 267). In altri termini, Hegel vede due forme di problemi teorici del calcolo infinitesimale, i problemi di giustificazione concettuale ed i problemi di rigore (operazionali). Egli afferma che la matematica potrebbe trascurare l'esistenza del primo tipo di problemi, perché il chiarimento della struttura concettuale non è di sua competenza, se in questo caso essi non coinvolgessero anche la questione del rigore logico. La posizione del problema non può che avvenire sul piano filosofico, ma le soluzioni avranno inoltre una portata anche nella scienza positiva. L'argomento hegeliano procederà allora nel modo seguente. Parlare di *infinito quantitativo* è esprimere una contraddizione, un'incoerenza. L'incoerenza ha un aspetto matematico, descritto sopra, ed un aspetto filosofico; ma per la filosofia che si pone come filosofia speculativa la contraddizione è oggetto privilegiato del suo metodo, la cui applicazione condurrà a riconoscere la natura dell'infinito non solo come negazione del finito, e del quanto non solo come negazione della qualità.

3. *Infinito e Qualità in matematica*

Si è visto come Hegel riformuli le questioni sollevate rispetto al calcolo infinitesimale, distinguendo problemi di ordine concettuale (cioè, il senso dell'infinito in matematica) e problemi di ordine operazionale (rigore), e notando che solo i secondi meriterebbero di essere considerati in matematica, se non fosse per il fatto che i primi implicano i secondi. In primo luogo, Hegel afferma che « L'infinitamente grande e l'infinitamente piccolo sono [...] figure della rappresentazione, che ad una considerazione piú particolare si danno a vedere come vana nebbia ed ombra » [4]. Ora, afferma Hegel, la fonte di errore non sta solo nel fatto di usare riferimenti all'infinito, ma anche di non contenere il *vero* infinito. Egli infatti applica a tali nozioni la celebre espressione « cattivo infinito ». Ciononostante, in questo uso erroneo si deve vedere un sintomo del problema vero e proprio, che Hegel ridefinisce come segue: il calcolo infinitesimale coinvolge l'infinito perché esso coinvolge non solo quantità, ma anche rapporto, che è per definizione qualità. Hegel scrive: « [...] il concetto (dell'infinito matematico) diventerà esso stesso piú chiaro, in quanto noi considereremo i diversi gradi della espressione del quanto come momento di un rapporto, a cominciare dal piú basso, dov'esso è insieme ancora un quanto come tale, fino al piú alto, dove acquista il significato e l'espressione di una grandezza propriamente infinita » [5].

Hegel perciò, nella prima parte della nota, prende in esame varie nozioni matematiche, non esclusivamente proprie del calcolo infinitesimale, sottolineando co-

[4] *Ib.*, p. 261.
[5] *Ib.*, p. 269.

me un elemento qualitativo intervenga a modificare il fondamentale carattere quantitativo. Poiché questa analisi è stata piú volte ripresa da vicino, ci limiteremo solo ad alcuni cenni. Hegel parte dalla sua definizione di *quanto* come indifferente distinguibile cioè da altri *quanti* solo per il « numero delle volte » *(Anzahl)* in cui, per definirli, si è presa l'unità. Numeri che possono distinguersi altrimenti sono invece i razionali (che infatti, nei nostri termini, sono *classi* di equivalenza di interi). I razionali possono talvolta vedersi come limiti di una serie, come nel caso

$$\frac{1}{1 - a} = 1 + a + a^2 + a^3 + \dots$$

(di cui Hegel omette la condizione di convergenza a 1). Ma, nel suo tentativo di dare una rappresentazione dell'infinito, la serie fallisce. Infatti, la serie infinita rappresenta il rapporto come una quantità: ciò comporta una perdita di contenuto, perché in tal modo il rapporto sparisce, e con esso la qualità, e in questo senso l'infinito che lo caratterizzava. Hegel osserva che: « [...] esprimere come numero di volte quello che riposa sopra una determinatezza qualitativa è la contraddizione permanente » [6]. In sostanza Hegel insiste che ciò che conta veramente è la legge del processo, e questa è contenuta nel rapporto, cioè nel limite della serie: « La serie è infinita non già a cagione dei membri o termini che son posti, ma per ciò ch'essi sono incompleti, perciò che l'altro, che essenzialmente loro appartiene, sta al di là di essi. Ciò che è presente nella serie, i termini posti siano pure quanti si vogliono, è soltanto un finito, nel vero e proprio senso, posto come finito, vale a dire come tale che non è quello che deve essere. All'incontro, quello che vien chiamato l'espressione finita o la somma di una tal serie è senza difetto; esso contiene completo quel valore che la serie non fa che cercare; l'al di là è richiamato dalla sua fuga; quello che cotesta cosiddetta espressione finita o somma è, e quello che deve essere, non son separati, ma son lo stesso » [7]. Hegel accenna anche alle serie non convergenti. Esse, possedendo la forma delle serie, contengono sia « la determinazione della cattiva infinità » sia un vero e proprio tipo di infinità, nel loro riferimento all'incommensurabilità, cioè all'impossibilità dell'espressione mediante un rapporto. Hegel conclude col riferimento a Spinoza e al suo esempio di infinito attuale, sul quale non ci soffermiamo. L'esempio ulteriore di infinito in matematica è costituito dalle funzioni delle linee curve e dalle « funzioni delle grandezze variabili », secondo l'espressione di Hegel. Dapprima, criticando il termine « grandezza variabile » egli distingue tra la variabilità già incontrata, quella che interviene in $\frac{2}{7}$ se si pensa alla sua classe di equivalenza, e quella presente in ogni espressione

[6] *Ib.*, p. 272.
[7] *Ib.*, p. 273.

letterale, come $\frac{a}{b}$ da un lato, e le quantità variabili vere e proprie dall'altro. Nel primo caso, il cui esempio è $\frac{y^2}{x} = p$ le incognite continuano a rappresentare quanti determinati, ma il loro rapporto, $\frac{y}{x}$, non è un quanto stabile, poiché nell'equazione si stipula soltanto che x ha un rapporto col quadrato di y. « Il rapporto di una grandezza verso una potenza non è un quanto, ma è essenzialmente un rapporto qualitativo; il rapporto di potenza è quella circostanza che è da riguardarsi come la determinazione fondamentale » [8]. Ora, perché il rapporto di potenza deve guardarsi come la determinazione fondamentale? La sua tesi è che nel calcolo infinitesimale si tratti di funzioni di quantità variabili, e ciò che le caratterizza è il « rapporto di potenze ». È quindi improprio, e dovuto al formalismo, al prevalere del momento sistematico sul significato applicativo, l'attribuire all'equazione della retta $y = ax$ il valore di funzione di quantità variabile. Hegel sviluppa questo aspetto nella seconda nota, dedicata alle applicazioni. Anticipiamo però alcuni elementi di giustificazione. La prima potenza può vedersi come risultato dell'operazione di differenziazione, e solo in questo senso rientra nel calcolo infinitesimale. Altrimenti non vi rientra, poiché non è suscettibile di differenziazione. « Cosí non ha senso il differenziare per sé le equazioni $y = ax + b$ della linea retta, o $s = ct$, della velocità semplicemente uniforme; (da esse si ottiene, differenziando) $\frac{dy}{dx} = a$ oppure $\frac{ds}{dt} = c$, (ma) $a = \frac{y}{x}$ è anche la determinazione della tangente, o $\frac{s}{t} = c$ quella della semplice velocità » [9].

Ciò meriterebbe piú ampia spiegazione, specialmente in riferimento alla meccanica analitica di Lagrange che ne indicherebbe il fondamento. D'altra parte, anche indipendentemente dal significato fisico, l'insistenza sulle potenze è legata alla definizione di derivata di Lagrange, basata sullo sviluppo di Taylor in serie di potenze. Per Lagrange, infatti, tutte le funzioni erano identificabili con il loro sviluppo in serie [10]. Dal punto di vista filosofico, comunque, l'insistenza sulle potenze è coerente

[8] *Ib.*, p. 278.

[9] *Ib.*, p. 311.

[10] L'origine dell'idea di funzione appartiene al XVII secolo. Fu Leibniz ad introdurre il termine « funzione » nel linguaggio matematico. Egli chiamò funzioni quelle quantità variabili che dipendono da una curva, quali coordinate, tangenti, subtangenti, normali, raggi di curvatura, ecc. Johann Bernoulli usò la parola funzione per espressioni analitiche che richiedono una quantità

con tutto il quadro concettuale: Hegel aveva già trattato delle potenze nella prima nota al secondo capitolo della sezione: « Il potenziare è il compiuto esser-determinato del numerare in se stesso »[11], in quanto essa introduce la mediazione tra i numeri (l'unità e le volte) che intervengono nel prodotto. Se, secondo questa interpretazione filosofica che Hegel stesso definisce « astratta », il quanto come potenza possiede un carattere concettuale, essa può presentarsi alla rappresentazione dell'elemento concettuale presente nel calcolo infinitesimale. Questo « concetto » consiste nel nesso tra quantità e qualità. L'esempio finale di infinito matematico è il quoziente differenziale. Esso riassume in sé varie nozioni matematico-qualitative analizzate in precedenza, trattandosi di un'espressione consistente di un rapporto tra quantità variabili. Inoltre, se nelle determinazioni di potenze, come ad esempio in $\frac{y^2}{x}$, i due termini del rapporto x e y^2 denotano quanti, « [...] questo significato va interamente perduto nelle cosiddette differenze infinitamente piccole, dx, dy non son piú dei quanti, né debbon piú significare dei quanti, ma hanno il loro significato unicamente nella relazione loro, hanno un senso solo come momenti. Non son piú qualcosa, prendendosi il qualcosa come quanto, non sono differenze finite; ma nemmeno sono un nulla, l'indeterminato zero. Fuori del loro rapporto sono dei puri zeri; ma devono essere per sé come momenti del rapporto, solo come determinazioni del coefficiente differenziale $\frac{dx}{dy}$ »[12].

Con il quoziente differenziale fu introdotto in matematica il vero infinito. Esso costituisce inoltre il concetto centrale del calcolo differenziale e il principio della sua storia, culminante, per Hegel, nella nozione di derivata di Lagrange. Hegel intende dunque, nel seguito della nota, tracciare la storia razionale della nozione di derivata, che sarà storia del calcolo differenziale visto autonomamente rispetto all'algebra e alla geometria, in quanto irriducibile concettualmente ad esse.

variabile. Eulero diede una vera e propria definizione: « una funzione è una espressione analitica composta, in una maniera qualunque, di quantità variabili e di numeri e quantità costanti » (*Introductio in Analysin Infinitorum,* 1748). Dal suo impiego noi possiamo supporre che con espressione analitica egli intendesse ciò che noi ora chiamiamo funzioni algebriche e funzioni trascendenti elementari. Che fino a Lagrange si considerassero oggetto dell'analisi solo funzioni lisce (continue e sviluppabili in serie) si riflette nella sua « soluzione » alla metafisica del calcolo infinitesimale, che presuppone lo sviluppo in serie di potenza di ogni funzione di cui si voglia determinare la derivata. Per lo sviluppo dell'idea di funzione si veda A. P. Youschkevitch.

[11] *Wissenschaft der Logik,* tr. it. cit., p. 227.

[12] *Ib.,* pp. 272-280.

4. *Hegel e Berkeley*

Mette conto di rilevarne l'originalità in quanto nella maggior parte della letteratura sulla « metafisica » del calcolo infinitesimale, a partire dal 1660 circa, la soluzione di questi problemi veniva identificata con la riduzione del calcolo infinitesimale al rigore classico delle altre parti della matematica; Leibniz, Newton e molti altri, fino a D'Alembert e Carnot, sostennero che le nuove nozioni (differenziali, flussioni, limiti, zeri) non erano nient'altro che *façons de parler*. La riduzione al rigore classico sarebbe stata quindi una semplice questione di traduzione in termini geometrici (principalmente il metodo di esaustione di Archimede). In altre parole, non era ancora concepibile dare al nascente campo di ricerca una struttura e fondamento teorico. Tipico rappresentante di questo approccio è Mac Laurin, che nel 1742 scrisse un trattato sul calcolo infinitesimale facendo esclusivamente uso di argomenti geometrici. Il suo trattato costituiva una risposta al dibattito aperto da Berkeley col suo pamphlet *The Analist* (1734). In tale saggio Berkeley criticava i vari livelli di ambiguità e incoerenza presenti negli scritti di Newton. Per dare un'idea del suo tipo di critica ci sia consentito di ricordare un celebre esempio. Berkeley considera il modo in cui Newton, nel suo *Tractatus de quadratura curvarum* (1963) definiva la *flussione* di x^n. Cioè se $f(x) = x^n$, si chiede che forma ha la sua flussione $\dot{f}(x)$. In notazione moderna,

$$\dot{f}(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x}, \text{ dove } \Delta x = o$$

$$\Delta y = (\Delta f)(o) = f(x+o) - f(x) = (x+o)^n - x^n$$

per il teorema del binomio,

$$= \sum_{i=o}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i}\, o^i - x^n$$

$$= \binom{n}{o} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1}\, o + \binom{n}{2} x^{n-2}\, o^2 + \ldots + \binom{n}{n} \cdot o^n - x^n$$

$$= x^n + nx^{n-1}\, o + \binom{n}{2} x^{n-2}\, o^2 + \ldots + o^n - x^n$$

$$\text{quindi } \frac{\Delta y}{\Delta x\ (= o)} = nx^{n-1} \binom{n}{2} x^{n-2}\, o + \ldots + o^{n-1}$$

Newton scriveva: « annulliamo $\binom{n}{2} x^{n-2}\, o + \ldots + o^{n-1}$

Il problema è stabilire che cosa ciò significhi, cioè, perché o dovrebbe essere dapprima considerato come una quantità, poi comportarsi come zero. Berkeley, dopo aver citato questo passo [13], segnalò l'esistenza del problema logico, affermando che questo metodo è contro la legge di contraddizione. In effetti, egli sostenne, l'ipotesi che l'incremento svanisce distrugge l'ipotesi che c'è un incremento. Analogamente, Berkeley criticò le nozioni introdotte nelle diverse presentazioni del calcolo infinitesimale: gli incrementi infinitamente piccoli e l'uso del triangolo caratteristico di Leibniz, i primi e ultimi rapporti e i limiti di Newton. Che cosa rende significativo l'approccio hegeliano rispetto a questa critica? Come si è visto Hegel iniziò la prima nota ponendo lo stesso problema: gli incrementi infinitamente piccoli sono o no una quantità? Il calcolo infinitesimale infatti li tratta in modo incoerente, e soprattutto non è chiaro il criterio che ci consente talvolta di tenerne conto nel calcolo e talaltra di trascurarli per ottenere risultati esatti. Ciò significa che non sono numeri. Indichiamo ora i principali punti di disaccordo tra l'approccio di Berkeley e quello di Hegel ai problemi della metafisica del calcolo infinitesimale. Anzitutto, Berkeley voleva suggerire argomenti contro la scientificità dei nuovi concetti dal punto di vista degli standards classici del rigore scientifico, identificati cioè con quelli della geometria. Al contrario, Hegel criticava il calcolo infinitesimale nell'intento di fornirgli un ruolo autonomo nel sistema delle scienze: egli accettava la presentazione del calcolo piú recente e piú algebrico, cioè la teoria delle funzioni di Lagrange, individuando come punto focale la sua nozione di funzione derivata. Avendo accettato il fatto che il calcolo differenziale è quel campo autonomo della matematica che tratta del rapporto tra una funzione e la sua derivata, si poneva la questione di sviluppare la « giustificazione » di tale relazione, attraverso l'elaborazione della sua storia razionale e l'approfondimento della struttura logica che ne consegue. La ragione per cui il rigore classico non è applicabile al calcolo infinitesimale è esterna alla teoria come tale, e risiede piuttosto nell'oggetto di cui esso è teoria: la logica del calcolo infinitesimale è nuova perché il suo oggetto di indagine è nuovo. Sia Berkeley che Hegel criticavano l'idea di approssimazione, o del trascurare delle grandezze nel calcolo, in quanto procedimento essenzialmente antiscientifico. Ma la differenza di intenti tra i due autori comporta altre distinzioni a livello teorico. Berkeley diede inizio ad una lunga tradizione nella metafisica del calcolo infinitesimale, introducendo il concetto di « compensazione di errori ». Questa nozione spiegherebbe come nel calcolo infinitesimale sia possibile ottenere risultati esatti mediante dimostrazioni non rigorose, facendo uso cioè di approssimazioni o di errori infinitamente piccoli. In ogni procedimento di questo tipo, infatti, si compirebbe un'approssimazione iniziale, poi compensata dal trascurare le quantità relativamente « piccole ». A questo proposito Berkeley fa riferimento al metodo di determinazione delle tangenti proprio di Leibniz, che fa uso del « triangolo caratteristico », il triangolo infinitamente piccolo di cui si approssima un lato mediante una porzione di

[13] Cfr. *The Analyst,* cit., p. 72.

curva [14]. Il primo errore consisterebbe nel considerare una porzione di curva come una retta, che costituisce un lato del triangolo caratteristico; il secondo errore sarebbe invece il trascurare le quantità infinitamente piccole presenti nello sviluppo algebrico. Dopo un'analisi dettagliata del metodo di De l'Hôpital, Berkeley conclude: « [...] perciò i due errori, essendo uguali e contrari, si annullano, il primo errore per difetto essendo corretto dal secondo errore per eccesso » [15]. È interessante anche vedere come prosegue: « Se si fosse commesso solo uno dei due errori, non si sarebbe pervenuti alla vera soluzione del problema. Ma in virtú di un doppio errore si arriva, se non alla scienza, almeno al vero. Poiché di scienza non si può trattare, quando si procede alla cieca, e si arriva al vero senza sapere come o con quali mezzi » [16]. Naturalmente Hegel concorda circa il fatto che questo procedimento implichi dell'arbitrio, e che « di scienza non si può trattare, quando si procede alla cieca, e si arriva al vero senza sapere come o con quali mezzi ». Ma il risultato cui approda è esattamente l'opposto: proprio perché la scienza non procede alla cieca, la prima cosa da evitare è di fare ricorso a un siffatto genere di spiegazione confusa. Il procedimento deve invece essere giustificato facendo ricorso a nuovi concetti. Ciò viene chiarito a proposito della trascurabilità di dy^2 nella differenziazione di x^n. Hegel infatti scrive: « In questo senso il differenziale di x^n si mostra subito interamente esaurito dal primo termine della serie nascente dallo sviluppo di $(x + dx)^n$. Che dei rimanenti termini non si tenga conto, non deriva cosí dalla loro relativa piccolezza, non si presuppone costí una inesattezza, un fallo od un errore, che sarebbe poi compensato e corretto con un altro errore (modo di vedere in base al quale Carnot principalmente giustifica il metodo ordinario del calcolo infinitesimale). Siccome non si tratta di una somma, ma di un rapporto, il differenziale è compiutamente trovato col primo termine; e dove abbisognino altri termini, i differenziali d'ordini superiori, allora nella loro determinazione non sta il continuarsi della serie come somma, ma la ripetizione di un solo e medesimo rapporto, il quale sol vien ricercato, e che perciò è già compiuto nel primo termine. Il bisogno della forma di una serie del loro sommarsi, e ciò che vi si connette, dev'essere allora intieramente separato da quell'interesse del rapporto » [17]. Hegel respinge dunque l'idea che, per giustificare il fatto che il quoziente differenziale è il primo termine, sia opportuno o necessario ricorrere all'espediente formalistico della compensazione di errori. Il fatto deve invece illuminarci sulla natura stessa del quoziente differenziale, ovvero su ciò che esso rappresenta in geometria o in fisica.

[14] Per la versione di De l'Hôpital, essenzialmente fedele al metodo di Leibniz, cfr. piú oltre, all'inizio del paragrafo 7.

[15] G. Berkeley, *The Analyst*, cit., p. 78.

[16] *Ibidem*.

[17] *Wissenschaft der Logik*, tr. it. cit., p. 295.

Cosí Hegel rifiuta l'atteggiamento empiristico di Berkeley, che non pone la questione di un nesso necessario tra una teoria e il suo oggetto.

5. *Approssimazione e applicazioni*

Determinare lo scopo del calcolo infinitesimale a partire dalle sue applicazioni permetterebbe di evitare le incoerenze del formalismo pragmatico di matematici (Newton) e filosofi (Berkeley). Sul citato esempio (x^n) afferma: « Newton si era attenuto a quel principio formale e superficiale, di tralasciare i termini a cagione della loro relativa piccolezza. È noto infatti che in meccanica ai termini della serie, nella quale viene svilupata la funzione di un movimento, vien dato un significato determinato, cosicché il primo termine e la prima funzione si riferisce al momento della velocità, il secondo alla forza acceleratrice, e il terzo all'opposizione o resistenza di forze. I termini della serie non debbono pertanto riguardarsi qui solo come parti di una somma, ma come momenti qualitativi di una totalità del concetto. Cosí il tralasciamento dei restanti termini, che appartengono alla serie progrediente verso il falso infinito, piglia un significato affatto diverso dal tralasciamento loro a motivo della loro relativa piccolezza » [18]. Hegel pare avere in mente la terza parte del *Traité des fonctions analytiques* di Lagrange, dedicato all'applicazione del calcolo infinitesimale alla meccanica, e nella nota a pie' di pagina sotto menzionata egli vi si riferisce esplicitamente. Benché consapevole del fatto che la matematica non può identificarsi con le sue applicazioni, e che una teoria matematica deve svilupparsi secondo criteri suoi propri, Hegel ritenne che il peculiare metodo del calcolo infinitesimale lo ponga in una sorta di piú stretta e piú diretta connessione con le leggi fisiche che noi chiamiamo sue applicazioni.

La qualità che, come abbiamo visto, conferisce il carattere concettuale alle principali nozioni di calcolo infinitesimale, non fa che riflettere una relazione dialettica tra matemativa (quantità) ed il suo soggetto. La qualità che incorre nel calcolo infinitesimale viene « dall'esterno », cosicché l'estrema spiegazione di ciò che avviene nel calcolo infinitesimale deve essere trovata anch'essa all'esterno.

In effetti Hegel scriveva all'inizio della seconda Nota: « Si può premettere l'osservazione che il metodo del calcolo differenziale lascia subito vedere che non è stato ritrovato e stabilito per se stesso; non solo è fondato per sé, come un'altra maniera di procedimento analitico, ma l'arbitrarietà di tralasciare addirittura dei termini che erano risultati dallo sviluppo di una funzione, mentre nondimeno si ammette che la totalità di questo sviluppo appartenga integralmente alla sostanza della cosa (poiché questa sostanza si ripone nella differenza della funzione sviluppata di una grandezza variabile dalla funzione originaria, dopo che venne data alla prima la forma di un

[18] *Ib.*, p. 293.

binomio), cotesto atto violento contraddice anzi assolutamente ad ogni principio matematico. Il bisogno di una tal maniera di procedere, come pure il fatto che le manca una giustificazione in se stessa, mostra subito che l'origine e la base deve trovarsi altrove »[19].

Ciò che vogliamo qui sottolineare è che, coerentemente con i rilievi offerti nella seconda Nota, si dovrebbe interpretare questo « altrove » in termini di significato fisico: l'« altrove » si colloca nel mondo di fatti empirici. Infatti si può leggere, ad esempio: « Se ora il vero e proprio cominciamento matematico, in questa parte dell'analitica, non consiste in altro che nel trovare la funzione determinata dallo sviluppo potenziale, rimane la questione di vedere che cosa si deve cominciare col rapporto cosí ottenuto, dov'esso ha una applicazione e un uso, o nel fatto, per quale scopo si cercano coteste funzioni. Il calcolo differenziale ha ottenuto il suo grande interesse nell'aver trovato, in oggetti concreti, dei rapporti che si lasciano ricondurre a quegli astratti rapporti analitici »[20]. Questi rapporti non sono dunque mere applicazioni di una teoria matematica (il calcolo infinitesimale) compiutamente sviluppata in sé stessa. Il calcolo infinitesimale è un esempio di una relazione assai peculiare tra teoria ed applicazione: « [...] ma quale fra i varii rapporti, in cui possono esser poste le determinazioni potenziali, sia quello che costituisce il peculiare oggetto e l'interesse per il calcolo differenziale, questo si deve ricavare dal calcolo differenziale stesso, cioè dalle sue cosiddette applicazioni. Queste sono infatti la sostanza stessa della cosa, l'effettiva mainera di procedere nella soluzione matematica di una certa cerchia di problemi. Questa maniera di procedere era esistito prima della teoria ossia della parte generale, e si chiamò poi applicazione solo relativamente alla teoria creata in seguito, teoria che voleva stabilire il metodo generale di cotesto procedere, e in parte poi fornirgli anche dei principii, vale a dire una giustificazione »[21].

Vediamo che cosa Hegel intendesse per « il peculiare oggetto e l'interesse per il calcolo differenziale ». Ciò sembra potersi interpretare come « la determinazione concettuale del calcolo differenziale », vale a dire la legge che pone in relazione una funzione con la sua derivata, la « legge di differenziazione ». La definizione data da Hegel è una sorta di « nuova denominazione », che dovrebbe piú precisamente riflettere il contenuto concettuale di questa: « relazione di una funzione di potenze con la funzione del suo sviluppo o elevamento a potenza ». Abbiamo già visto che « la determinazione potenziale » $y = x^n$ riveste, secondo Hegel, un ruolo centrale nella costruzione di funzioni. Con « funzione di potenze » noi possiamo intendere

[19] *Ib.*, pp. 306-307.
[20] *Ib.*, pp. 315-316.
[21] *Ib.*, pp. 308-309.

semplicemente x^n, mentre con funzioni del suo sviluppo o elevamento a potenza Hegel intende i coefficienti, che danno derivate di ordini differenti. Ma è concettualmente rilevante pensare al primo coefficiente come il piú importante, e poiché l'operazione valida ad ottenerlo è sufficiente anche ad ottenere tutti gli altri [22]. Cosí, come egli scrive, in

$$(x + dx)^n = x^n + (n \cdot x^{n-1}) dx$$

si possono e si devono ignorare gli altri termini della serie, le altre funzioni dello sviluppo.

È interessante notare che l'idea di considerare il primo termine come il piú importante, diffusa fin dalle origini del calcolo infinitesimale, viene qui giustificata con lo stesso tipo di argomenti presenti nel testo di Lagrange *Leçons sur le calcul des fonctions.* Infatti leggiamo: « Quoique les fonctions dérivées doivent leur origine au développement de la fonction primitive lorsqu'on augmente la variable d'une quantité quelconque *i,* on voit qu'elles sont indépendantes de cette même quantité qui ne sert, pour ainsi dire, que comme un outil pour former ces fonctions. Ainsi, dès qu'on aura trouvé, par la considération du premier terme du développement, des règles générales pour passer d'une fonction primitive à la fonction dérivée, on pourra faire abstraction de tout développement, et regarder la dérivation des fonctions comme une nouvelle opération d'Algèbre plus générale et d'une beaucoup plus grande étendue que l'élévation aux puissances » [23]. Questa concezione di Lagrange condivisa da Hegel, secondo cui l'aspetto principale è la prima derivata, è strettamente connessa con la nozione di applicazione. Ciò significa che la ragione per la quale il calcolo differenziale non si identifica con la teoria delle serie, ed anche la ragione per la quale le serie che ricorrono nel calcolo infinitesimale « si arrestano » ad un termine dato, non è una ragione algebrica meramente formale, ma risiede

22 Alla questione dell'importanza delle applicazioni rispetto al dibattito sulla metafisica del calcolo infinitesimale, Hegel dedica la seguente nota a pié di pagina: « Nella critica summenzionata [...] si trovano interessanti dichiarazioni di un dotto scienziato della materia, il Sig. Spehr, . . . ». « Non si son separate », cosí in quel luogo (scil. » « *Jahr. für wissensch. Krit.* » vol. II, 1827, n. 155, pp. 6 sgg., che cita da Spehr, *Neuen Principien des Fluentencalculs,* Braunschw. 1826), « dal vero e proprio calcolo differenziale alcune ricerche puramente aritmetiche, che fra tutte le simili hanno certamente in primo luogo relazione con questo calcolo; anzi, come da Lagrange, si son tenute coteste ricerche per la cosa principale stessa, mentre si riguardò questa solo come un'applicazione di quelle. Queste ricerche aritmetiche comprendono in sé le regole della differenziazione, la derivazione del teorema di Taylor e cosí via, anzi perfino i diversi metodi di integrazione. La cosa sta precisamente all'opposto: sono appunto coteste applicazioni che costituiscono l'oggetto del vero e proprio calcolo differenziale, mentre tutti quegli sviluppi e operazioni aritmetiche esso li presuppone dall'analisi ».

23 J. L. Lagrange, *Leçons sur le calcul des fonctions,* cit., p. 19.

nella necessità di risolvere il problema geometrico del coefficiente angolare di una curva ed il problema fisico della velocità istantanea.

La qualità viene introdotta nel calcolo infinitesimale mediante quanti che hanno anche un carattere qualitativo. Ma la ragione per cui si introduce il quanto qualitativo del tipo del « quoziente differenziale » è una ragione già di per sé esterna all'algebra pura, e coinvolge fisica e geometria. L'altra ragione per la quale questa nozione di quoziente differenziale implica la qualità risiede nel fatto che i due « significati esterni » descrivono entrambi un « cambiamento », vale a dire esprimono un cambiamento quantitativo che comporta un cambiamento qualitativo. In questo senso il calcolo infinitesimale deve intendersi come teoria del cambiamento da un tipo di grandezza ad un'altra: retta-curva, moto rettilineo-moto accelerato, ecc.

Piú specificamente, Hegel scrive: « Lo sviluppo delle grandezze potenziali, dal quale risultano le funzioni del loro potenziamento, contiene anzitutto in generale, astrazion fatta da una piú particolar determinazione, il rabbassamento della grandezza alla prossima potenza inferiore. L'applicabilità di questa operazione ha pertanto luogo in quegli oggetti nei quali parimenti si trova una tal differenza di determinazioni potenziali. Se ora riflettiamo alla determinatezza dello spazio, troviamo che contiene le tre dimensioni, le quali noi, per distinguerle dalle differenze astratte altezza, lunghezza, e larghezza, possiamo designare come dimensioni concrete, cioè la linea, la superficie, e lo spazio totale; ed in quanto esse vengono prese nelle loro piú semplici forme e relativamente al lor proprio determinarsi e con ciò alle dimensioni analitiche, abbiamo la linea retta, la superficie piana e questa medesima come quadrato, e il cubo. La linea retta ha un quanto empirico, ma col piano si presenta il qualitativo, la determinazione potenziale; le modificazioni piú particolari, come p. es. che questo accade del pari anche colle curve piane, possiamo tralasciare di esaminarle, poiché anzitutto si ha da fare colla differenza presa semplicemente in generale »[24]. Cosí diviene chiaro in cosa consiste il « processo da una funzione alla sua derivata », la differenziazione: « Con ciò nasce anche il bisogno di passare da una determinazione potenziale piú alta a una piú bassa e viceversa, in quanto p. es. debbon derivarsi determinazioni lineari da date equazioni della superficie ecc., o viceversa. Il moto inoltre, come quello in cui è da considerare il rapporto quantitativo dello spazio percorso e del relativo tempo trascorso, si mostra nelle diverse determinazioni del moto semplicemente uniforme, del moto uniformemente accelerato e del moto che è in maniera alternata uniformemente accelerato e uniformemente ritardato, moto rientrante in sé. In quanto queste diverse specie di moto vengono espresse secondo il rapporto quantitativo dei loro momenti, dello spazio e del tempo, nascono, per coteste specie, delle equazioni da diverse determinazioni

[24] *Wissenschaft der Logik*, tr. it. cit., p. 316.

potenziali, ed in quanto vi può esser bisogno di determinare una specie di moto, o anche delle grandezze spaziali, cui una specie è legata, da un'altra specie del moto stesso, l'operazione porta parimenti seco il passaggio da una funzione potenziale ad altra piú alta o piú bassa. Gli esempi di questi due oggetti possono bastare per lo scopo per cui furono addotti » [25]. Come concreta esemplificazione del fatto che l'arbitrarietà dei procedimenti nel calcolo infinitesimale è in realtà una « parvenza di arbitrarietà », e che questi procedimenti sono giustificati alla luce di « applicazioni », Hegel prende un capitolo della *Théorie des fonctions analytiques* di Lagrange, che tratta del metodo con cui trovare la tangente in un punto di una curva data.

6. *Un esempio di applicazione: metodo di determinazione delle tangenti di Lagrange*

La trattazione data da Lagrange al problema di trovare la tangente ad una curva data è articolata in tre momenti. Solo l'ultimo interessa il problema specifico, ma la sua soluzione poggia sui due precedenti, che affrontano la questione nella sua generalità. Lo specifico problema è squisitamente geometrico, e deve ricorrere solo alla geometria. Cosí l'ultimo momento cui Lagrange ha fatto ricorso fa riferimento alla definizione di Euclide e Apollonio per cui una tangente ad una curva data è una linea retta avente un punto in comune con la curva, e tale che non sia possibile tracciare una qualsiasi altra linea retta tra la linea e la curva e passante per quel punto. Secondo Lagrange tutti gli altri modi di concepire la tangente sono il risultato del fatto che, tramite l'applicazione dell'algebra alla geometria, le curve sono cadute sotto il dominio dell'analisi. In termini moderni, essi implicano il concetto di limite.

Nella prima parte della *Théorie des Fonctions Analytiques* Lagrange considera la teoria delle derivate come la teoria dello sviluppo di funzioni in serie di potenze, in modo puramente algebrico [26]. In questa prima parte egli non prende in considerazione alcun genere di intuizione geometrica segue la tradizione inaugurata, in analisi, da Reyneau, che con il suo manuale *Analyse démontrée* (Parigi 1708), fu il primo

[25] *Ib.*, pp. 316-317.

[26] Ci sia consentito delineare brevemente gli aspetti principali del metodo di Lagrange. La *Théorie des fonctions analytiques* è il primo trattato sul calcolo infinitesimale in cui la nozione di funzione svolga un ruolo centrale. Prima di esso, le quantità variabili implicate nella nozione di quoziente differenziale erano interdipendenti. Cosí questo trattato è stato l'esito del processo che, attraverso Eulero, conduce ad una trattazione del calcolo infinitesimale completamente algebrica: in questa prospettiva il calcolo infinitesimale è concepito come una teoria di funzioni, ed il quoziente differenziale viene chiamato derivata, perché diventa la funzione derivata. Anche il termine « derivata » fu introdotta da Lagrange, volendo con ciò significare che essa è derivata (« dérivée ») con riferimento alla funzione originaria (fonction primitive). Lagrange ritenne di dare una soluzione definitiva ai problemi del calcolo infinitesimale appunto mediante la sua teoria delle funzioni. Il suo punto di partenza consiste nell'ipotizzare che il teorema di Taylor valga per

analista che non faccia uso di figure. Inoltre Lagrange riteneva che la teoria delle funzioni gli consentisse di ritornare a fare uso delle nozioni e dei princìpi degli antichi [27]. Il primo punto è quindi la nozione di derivata come la « prima funzione » f' della primitiva funzione f, definita da Lagrange come il primo coefficiente dello sviluppo di f. Il secondo punto è il metodo generale di comparazione tra due curve attorno ad un punto comune. Lagrange sviluppò questo metodo nella seconda parte della *Théorie des fonctions analytiques,* dedicata alle « Applications de la théorie des fonctions à la geometrie » e, piú specificamente, miranti allo scopo di trattare le tangenti alla vecchia maniera, cioè facendo riferimento al concetto di contatto, come di rispondere al quesito geometrico « fino a che punto due curve si "toccano l'un l'altra", attorno ad un punto comune? ».

Il contatto tra due curve è una nozione spaziale, intuitiva. Ma per misurarlo è geometricamente ovvio prendere in considerazione la differenza o distanza tra le ordinate: qui noi guardiamo alle funzioni come curve, vale a dire nei termini dei loro diagrammi. Ma, secondo l'analisi di Lagrange, il comportamento di funzioni attorno ad un punto (intendiamo dire: nell'intorno di un punto comune dato) è determinato dal loro sviluppo in serie di potenze. Per tale ragione il contatto geometrico è trasposto in differenza algebrica tra i termini di una serie di potenze [28]. Vale a dire, dato

$$y = f(x) \quad \text{e} \quad q = F(p)$$

ogni funzione. Si ha cioè che, per un dato x, f(x + h) si può sviluppare in una serie di potenze nell'incremento h della forma

$$f(x + h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2 f''}{2!}(x) + \frac{h^3 f'''}{3!}(x) + \dots$$

Lagrange definì allora la derivata come un numero, e precisamente come il primo coefficiente nello sviluppo della serie di f(x + h). Il problema principale, anche rispetto alla nozione di funzione propria del suo tempo, è la convergenza di una serie del genere, a meno che, come Lagrange, non ci si ponga in un universo di funzioni lisce.

27 Lagrange scrive in *Théorie des fonctions analytiques*: « Secondo gli antichi geometri, una linea retta è tangente di una curva quando, avendo un punto in comune con la curva, non è possibile tracciare alcuna retta tra essa e la curva: è in forza di questo principio che essi hanno determinato le tangenti nel piccolo numero di curve che hanno preso in considerazione. Ma, da quando, per l'applicazione dell'algebra alla geometria, le curve sono state poste sotto il dominio dell'analisi, si sono osservate le tangenti sotto altri punti di vista: le si è considerate come delle secanti delle quali i punti di intersezione siano molto vicini, o come il prolungamento di lati infinitamente piccoli della curva, considerata come un poligono avente un numero infinito di lati, o come la direzione del movimento composto grazie al quale la curva può essere descritta, e questi modi differenti di considerare le tangenti hanno dato luogo a metodici differenziali fondati sul rapporto di differenze infinitamente piccolo o di flussioni di coordinate » (trad. nostra).

28 *Théorie* ecc., cit., p. 184.

richiediamo che, per il punto x, $F(x) = f(x)$

Il contatto, cioè la differenza tra le ordinate, è dato da

$$f(x + i) - F(x + i)$$

vale a dire, sviluppando le funzioni e sapendo che $f(x) - F(x) = 0$,

$$i[f'(x) - F'(x)] + \frac{i^2}{2!}[f''(x) - F''(x)] + \frac{i^3}{3!}[f'''(x) - F'''(x)] + \dots$$

« et cette difference exprimera la distance des points des deux courbes qui répondent à la même abscisse x ». In generale, ciò vuol dire che il contatto è maggiore se vi sono piú termini che si elidono all'inizio di questa serie.

Piú tardi Lagrange dà una prova della « conclusione » che ne consegue: « On peut conclure de là en général, que, si l'on a une courbe quelconque et qu'une autre courbe donnée ait un point commun avec celle là, ce qui exige que leur ordonnées pour la même abscisse soient égales, alors il sera impossible qu'aucune autre courbe qu'on mènerait par le même point commun passe entre les deux courbes, à moins que la fonction prime de son ordonnée pour la même abscisse ne soit aussi égale à la fonction prime de l'ordonnée commune aux deux courbes » [29].

Date queste premesse, Lagrange considera il problema di determinare l'equazione della tangente nel modo seguente. Confrontiamo le due funzioni y e q, dove le equazioni corrispondenti rappresentano una curva e una linea retta

$$y = f(x)$$
$$q = F(p) = a + bp$$

Si supponga che queste due funzioni abbiano in comune un punto d'ordinata x. In questo modo

$$* \; f(x) = F(x) = a + bx$$

Si supponga anche che

$$** \; f'(x) = F'(x)$$

Ora si considerino gli sviluppi

$$f(x + i) = f(x) + i\,f'(x) + \frac{i^2}{2!}f''(x) + \dots$$

$$F(x + i) = a + bx + ib$$

[29] *Ib.*, p. 188

in forza della definizione di derivata data da Lagrange. Ma per ✻ ✻

$$F'(x) = f'(x) = b$$

E poiché, per ✻

$$F(x) = a + f'(x)x = f(x)$$
$$a = f(x) - f'(x)x$$

data l'equazione della curva e un suo punto, possiamo determinare la tangente in quel punto come

$$F(p) = f(x) - f'(x)x + f'(x)p$$

Avendo determinato questa equazione, sulle sole premesse ✻ e ✻ ✻, si tratta di dimostrare che essa soddisfa la definizione della tangente di f(x) in x, vale a dire verificare che nessun'altra linea si possa tracciare tra essa e la curva. Nell'ipotesi per assurdo che tale retta esista, Lagrange fa uso del suo principio generale di comparazione delle funzioni [30]. Secondo questo principio, ogni altra linea tra y e q che soddisfacesse ✻ dovrebbe soddisfare anche ✻ ✻. Ma, avendo lo stesso sviluppo, le due linee rette avranno la stessa equazione, ciò che conclude la dimostrazione.

La conclusione, che possiamo ottenere l'equazione della tangente dalla derivata, può esprimersi anche col dire che il significato del processo atto a trovare la derivata è, dal punto di vista geometrico, di dare l'inclinazione della curva a quel punto. Proprio in questo senso Hegel inserisce l'approccio di Lagrange nel contesto del rapporto tra teoria e applicazioni. Egli sottolinea anche che il metodo di Lagrange mostra perché solo il primo coefficiente nella serie di potenze è effettivamente rilevante per trovare la derivata: il « carattere lineare » della curva è l'esatta motivazione che porta a trascurare gli altri termini della serie di potenze, eliminando cosí l'arbitrarietà del procedimento. Hegel sottolinea quindi la scientificità del metodo di Lagrange quanto al rapporto tra geometria ed algebra. Aggiungiamo soltanto che Hegel era nel giusto quando sottolineava l'importanza della storia di Lagrange sulla comparazione di funzioni. La nozione di contatto sviluppata da Lagrange è ancora oggi studiata nei suoi termini; anche se egli non chiamò lo sviluppo di Taylor uno sviluppo nell'intorno di un punto, egli l'ha usato in questo senso. Hegel afferma che l'approccio di Lagrange è scientifico perché esso esprime la relazione concettuale tra una linea retta ed una curva per mezzo di ciò che effettivamente segna la loro uguaglianza e la loro differenza: essi sono uguali in termini di inclinazione ma differiscono in termini di potenze; inoltre essi sono correttamente concepiti come due aspetti dello stesso processo di potenziamento e differenziazione (distinti ma non separati).

30 *Ibidem.*

7. *Geometria e teoria delle funzioni analitiche*

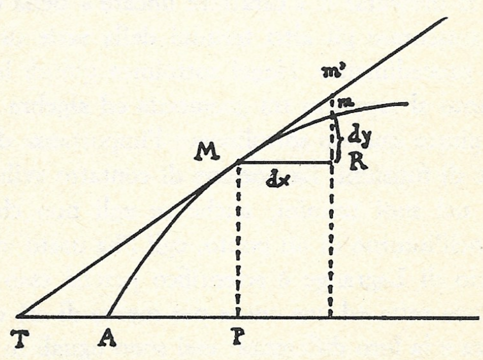
Secondo Hegel, il merito principale dell'approccio di Lagrange stava nel fatto di dare una definizione di derivata che, pur tenendo dell'intuizione geometrica, soddisfacesse anche interamente i criteri ordinari di rigore, in quanto completamente algebrica. Inoltre, egli risolse il problema di fornire un criterio grazie al quale trascurare i termini contenenti derivate di secondo (e piú elevato del secondo) grado nella serie delle potenze. Questo criterio era precisamente il senso geometrico della derivata, che per Hegel era connesso anche al senso fisico.

A questo proposito Hegel confronta Lagrange e i precedenti analisti, sulla questione « dell'aspetto geometrico » del calcolo infinitesimale. Già nella prima Nota, Hegel aveva infatti sollevato alcune precise critiche all'impostazione pragmatista dei primi autori del calcolo infinitesimale. Eppure, si potrebbe obiettare, essi avevano indubbiamente tenuto conto del significato geometrico del calcolo infinitesimale. Perché allora preferire ad essi l'approccio di Lagrange, per venire piú tardi a giustificare il calcolo infinitesimale in termini di sue applicazioni? In realtà Hegel considerava la distinzione tra la parte generale (teoria delle funzioni analitiche) e le applicazioni di essa essenziale allo sviluppo scientifico allo stesso modo del riconoscimento della loro connessione.

Ci sia consentito prendere in esame, come esempio, una breve descrizione del metodo atto a trovare la tangente secondo l'impostazione usata in *Analyse des infiniment petits...* di de l'Hôpital.

Teniamo presente la figura seguente:

m sulla curva
m' sulla retta



AM è la curva (una parte di essa), espressa da una equazione data. Si pone il problema di tracciare la tangente TM passante per il punto dato M sulla curva.

Supponiamo che TM sia la tangente richiesta. Tracciamo l'ordinata di M. Immaginiamo un altra ordinata mp, arbitrariamente vicina alla prima, ed una piccola linea RM, parallela ad AP. Se diciamo che AP = x; MP = y; RM = dx;

Rm = dy, abbiamo, per la similitudine dei due triangoli,

$$dy : dx = y : TP$$

e di qui

$$TP = \frac{ydx}{dy}$$

Ora, differenziando, secondo il metodo noto, l'equazione della curva data, possiamo esprimere dx in termini di dy, e moltiplicando per y e dividendo per dy, otteniamo lo stesso risultato, ma senza differenziali e dato da valori noti. Questa via fa ricorso al cosiddetto triangolo caratteristico TMP. L'intuizione è di identificare il triangolo infinitesimale (non considerato esplicitamente) MRm', l'unico che sia realmente simile a TMP, ed il triangolo MRm, di cui un lato è una porzione di curva. Questa dimostrazione fa uso di due assiomi del manuale di De l'Hôpital, che in termini moderni danno: 1) $x = x + dx = x - dx$; 2) l'arco infinitamente piccolo è un lato di un poligono e perciò identificabile con la tangente (ad M).

Quali sono gli aspetti centrali della critica di Hegel? Egli tratta dei metodi geometrici dei piú antichi analisti in modo globale: per esempio egli parla di Barrow, che avrebbe indicato la sua scoperta della relazione delle linee (tangente, subtangente, normale, subnormale) e l'equazione della curva « in una maniera affattoo empirica [...], senza poter rendere conto dell'operazione rimasta completamente estrinseca » [31]. Sostanzialmente Hegel considerò il metodo antico come ingiustificato e « ad hoc ». Da un lato è molto importante che la matematica si sviluppi in modo indipendente dal singolo procedimento: la teoria deve essere astratta, una generalizzazione di vari casi. Lagrange aveva trovato il modo di risolvere tutti i gradi di difficoltà nel contesto della teoria delle funzioni analitiche, in uno schema che racchiudeva un senso tanto geometrico quanto fisico. Ma anche questo approccio è sottoposto a critica: la distinzione, introdotta da Lagrange, tra la teoria e le applicazioni deve essere vista come rovesciata: l'ultima giustificazione dei procedimenti centrali nel calcolo infinitesimale (ed è ciò che distingue questo calcolo dagli altri campi) sono precisamente ciò che Lagrange chiama loro applicazioni, perché la struttura formale, per quanto coerente, non produce alcuna giustificazione di se stessa, essa non dice il « perché ».

Il perché, effettivamente essenziale ad intendere la presenza dell'infinito (qualità) in alcune nozioni, quali il quoziente differenziale, è dato dai vari modelli matematici che possiedono la struttura descritta in termini formali dalla teoria generale. L'approccio di Lagrange, che combina la premessa formale e realmente generale con il significato concreto, risulta mal teorizzato, poiché Lagrange, che con-

[31] *Wissenschaft der Logik,* tr. it. cit., p. 318.

siderò anche le applicazioni come « secondarie » nei confronti della teoria delle funzioni. Scrive infatti: « I matematici di una volta cercavano di esprimere in parole e proposizioni i risultati del calcolo infinitesimale allora scoperto (che d'altronde si aggirava sempre intorno ad oggetti concreti), e di presentarli in costruzioni geometriche, soprattutto affin di adoperarli per i teoremi secondo il modo usuale di dimostrare. I termini di una formula matematica, in cui la trattazione analitica scomponeva la grandezza dell'oggetto, p. es. del moto, ottenevano costí un significato oggettivo, p. es. di velocità, di forza acceleratrice ecc.; in conformità di cotesto significato essi dovevan dare proposizioni esatte, leggi fisiche, e secondo il lor collegamento analitico dovevano poi anche esser determinati i loro nessi e rapporti oggettivi, come appunto, p. es., che in un moto uniformemente accelerato esista una particolare velocità proporzionale ai tempi, e che a questa si sopraggiunga poi sempre un aumento derivante dalla forza di gravità » [32]. Il riferimento ai fisici riguarda l'opera di Newton, analizzata in modo particolare da Hegel nella sezione seguente della *Scienza della Logica,* la sezione « Misura ».

« Nella moderna forma analitica della meccanica — prosegue Hegel — tali proposizioni vengono addotte addirittura come risultati di calcolo, senza guardare se abbiano per sé in se stesse un senso reale, cui corrisponda cioè una esistenza, e senza preoccuparsi di fornir di ciò una prova. La difficoltà di rendere intelligibile il nesso di tali determinazioni, quando vengon prese nell'accennato senso reale (p. es. il passaggio da quella velocità assolutamente uniforme a una velocità uniformemente accelerata), si riguarda come intieramente eliminata mediante la trattazione analitica, come quella in cui cotesto nesso è una semplice conseguenza dell'ormai assodata autorità delle operazioni del calcolo » [33]. In altre parole, l'antico metodo di Fermat, Barrow, Leibniz e Newton, benché piuttosto primitivo dal punto di vista teoretico, aveva il vantaggio di limitarsi ad operare solo su specifici problemi, ciascuno dei quali preso in se stesso (« cui corrisponda cioè una esistenza »), mentre Lagrange considera questi risultati specifici come già dati, e tende ad usare la sua teoria in modo tale da dare molta piú importanza al formalismo. Hegel prosegue: « Si dà come un trionfo della scienza, di trovare al di là dell'esperienza, per mezzo del semplice calcolo, delle leggi, cioè dei principii dell'esigenza, i quali non hanno alcuna esistenza. Ma nei tempi primitivi e ancora ingenui del calcolo infinitesimale si doveva di quelle determinazioni e principii, rappresentati in costruzioni geometriche, assegnare per sé e render plausibile un significato reale, mentre in un tal significato dovevano quelle determinazioni e principii applicarsi alla dimostrazione delle proposizioni fondamentali di cui si trattava [...]. Non si potrà negare che in questo campo molto è stato accettato come dimostrazione, soprattutto coll'aiuto di quella nebbia

[32] *Ib.*, p. 303.
[33] *Ibidem.*

dell'infinitamente piccolo, senz'altro motivo che questo, che cioè quello che risultava era sempre già conosciuto in precedenza, e che la dimostrazione, la quale era stata disposta in modo che cotesto risultasse, procurava perlomeno l'apparenza di una impalcatura di dimostrazione [...]. La vuota implacatura di cotesta dimostrazione venne innalzata per dimostrare delle leggi fisiche. Ma la matematica non è in generale capace di mostrare delle determinazioni di grandezza appartenenti alla fisica, in quanto son leggi che hanno per base la natura qualitativa dei momenti; e ciò per la semplice ragione che questa scienza non è filosofia, non parte dal concetto, e che quindi il qualitativo, in quanto non viene assunto in guisa lemmatica dall'esperienza, sta fuori della sua sfera. Il desiderio di sostenere l'onore della matematica, che tutte le proposizioni che vi si presentano abbiano ad essere rigorosamente dimostrate, fece ch'essa dimenticasse spesso i suoi limiti. Cosí sembrò contro il suo onore di riconoscere per le proposizioni sperimentali semplicemente l'esperienza quale fonte e quale unica prova. Dipoi la coscienza è divenuta in proposito meno rozza; ma fintantoché non sia venuta in chiaro circa la differenza che corre tra ciò ch'è dimostrabile matematicamente e ciò le può esser soltanto assunto dal di fuori, come anche circa il divario tra quelli che son soltanto termini di sviluppo analitico e quelle che sono esistenze fisiche, lo spirito scientifico non può affinarsi in modo da arrivare a condursi in maniera rigorosa e pura »[34].

La matematica, secondo Hegel, non può dunque *dimostrare* (cioè dedurre astrattamente senza che di esse si trovi conferma dall'esterno) le leggi fisiche, in quanto esse hanno un senso qualitativo. Naturalmente la matematica può dimostrare e di fatto dimostra gli aspetti formali delle leggi fisiche, ma i criteri di rigore tipici della matematica (ed in essa adeguati) non impediscono di dedurre anche formule di natura non fisica. Cosí, le leggi dedotte nel calcolo infinitesimale devono essere giudicate e, se accolte, giustificate, alla luce del significato qualitativo (esperienza fisica).

Circa il « concettuale » (nella terminologia hegeliana) contenuto del calcolo infinitesimale, che è strettamente connesso a quanto sopra considerato, leggiamo ancora: « ... per la ragione che la matematica non è filosofia, non parte dal concetto ». Qui l'accento viene a cadere su « parte ». Hegel non esclude che dei concetti appartengono alla matematica, e in particolare al calcolo infinitesimale. Al contrario, egli scrive, ad esempio, parlando delle flussioni di Newton, che « il pensiero non può esser piú esattamente determinato di come Newton lo ha dato »[35] e, inoltre, « Questa depurazione del rapporto quantitativo non è quindi altro di ciò che accade quando un esistere empirico vien concepito. Cotesto esistere viene allora elevato sopra se stesso, per modo che il suo concetto contien bensí le medesime determinazioni che sono in esso, ma però comprese nella loro essenzialità e nell'unità del concetto,

[34] *Ib.*, pp. 303-305.
[35] *Ib.*, p. 281.

dove hanno perduto la loro sussistenza indifferente e inconcettuale » [36]. Se il concetto è il processo quantità-qualità, esso non può che essere raggiunto tramite una esplicita connessione della teoria con le sue applicazioni.

8. *La transizione alla Misura e la relazione tra il calcolo infinitesimale e la fisica matematica. Conclusioni*

Le Note sul calcolo infinitesimale appartengono all'ultima parte della sezione « Quantità ». La parte seguente del testo concerne il rapporto quantitativo; segue la sezione « Misura ». Poiché il tema principale resta ancora la dialettica quantità-qualità, è ragionevole chiedersi quale sia la connessione con il calcolo infinitesimale. Nella sezione « Misura » Hegel dà nello stesso tempo una critica ed una giustificazione della fisica matematica. Egli esamina in particolare alcune delle leggi della fisica, che possiedono il carattere sorprendente d'essere interamente matematiche e, nello stesso tempo, di operare in quanto tali in natura. Esempi salienti sono le leggi di Keplero sulle orbite dei pianeti e le leggi di Galileo sulla caduta dei gravi. Questi due autori in particolare sono riguardati come i piú rappresentativi creatori della scienza; Newton sembra avere un posto inferiore nella storia del pensiero scientifico, perché perse un'occasione di creare una « vera » fisica matematica. La ragione di questa critica risiede precisamente nel suo modo di usare il calcolo infinitesimale nella scienza della natura. Secondo Hegel, l'impiego del calcolo infinitesimale ci consente di ricostruire le leggi dei fenomeni, ma non le condizioni in cui queste leggi « operano » e danno origine allo specifico fenomeno in quanto tale. Il contenuto della critica di Hegel è effettivamente identico a quella formulata allo scopo di ammonire contro i rischi di formalismo implicati nelle concezioni di Lagrange sulle applicazioni del calcolo infinitesimale. Il calcolo infinitesimale è la parte della matematica che interessa i cambiamenti in qualità, ed è chiaro sin da Platone e Aristotele che il dominio della qualità e del cambiamento qualitativo, il dominio della molteplicità e della variabilità è anzitutto il mondo fisico. Cosí il calcolo infinitesimale può e deve essere utilizzato per comprendere il mondo fisico: l'unico rischio della scienza matematica della natura è di condurre alla conclusione che quelle leggi fisiche esauriscano il contenuto del processo nel fenomeno [37]. Galileo e Keplero, invece, avrebbe mantenuto la distinzione tra aspetto quantitativo e qualitativo, senza pretendere di dedurre leggi fisiche.

[36] *Ib.*, p. 284.

[37] Sino ad ora, a mia conoscenza, il progetto è stato preso sul serio solo da tre studiosi: E. MEYERSON, nel volume *De l'explication dans les sciences,* Paris 1921; piú recentemente, A. Doz, nel suo commento ad una traduzione francese; e, con grande autorevolezza, E. Cassirer, che, nel suo *Das Erkenntnis Problem...* rileva che l'elaborazione hegeliana sulla fisica matematica nella teoria della misura contiene importanti elementi delle sue concezioni sulla conoscenza fisico-matematica, che si dovrebbero tenere nel dovuto conto nell'indagare le concezioni di Hegel delle scienze della natura, anche piú delle famose assurdità della sua filosofia della natura.

Hegel, nella prima Nota, sviluppa dunque due processi: quello *concettuale,* relativo al carattere qualitativo di alcune nozioni matematiche (quali numero razionale, funzione, rapporto differenziale) e quello *storico,* specificamente relativo allo sviluppo della nozione di infinito nel calcolo differenziale. Dopo le preliminari precisazioni storiche sul significato di alcuni termini matematici usati da Hegel (infinito e infinitamente piccolo; funzione, sviluppabilità in serie), è stato possibile seguire Hegel nella ricognizione concettuale. In essa, egli sottolinea anzitutto la centralità, per lo sviluppo del calcolo, dell'idea di funzione e dell'identificazione tra un'equazione indeterminata di grado superiore al primo e una curva. In secondo luogo, egli capovolge il problema della legittimità della trattazione dell'infinito nel calcolo: la questione, tradotta in termini hegeliani, consisteva ad es. nel domandarsi come potevano trattarsi matematicamente i rapporti di quanti che non sono piú tali (che sono soltanto « quanti tolti ») come nel caso di dx. In realtà, sostiene Hegel, proprio i « quanti tolti » sono suscettibili di essere concepiti in un rapporto, contrariamente ai quanti per definizione « irrelati ». In altri termini, qui si tratta di nozioni matematiche nuove, e le difficoltà o incoerenze sono relative piú alla notazione dx, o, ecc. (che richiama l'origine geometrica) che alle idee sottostanti.

Se la problematicità di queste nozioni non va sottovalutata, ciò non è dovuto alla consistenza di queste prime difficoltà del procedimento di differenziazione (risolubili, e risolte di fatto, mediante la definizione di limite, e la definizione di derivata di Lagrange), ma alla complessità delle questioni che la teoria si prefigge di trattare. Alla critica dell'infinitamente piccolo, Hegel aggiunge quella dell'infinito della serie, in quanto è un esempio di « cattiva infinità », ciò che nel contesto matematico significa inadeguatezza di una rappresentazione che per definizione non vuole essere presa alla lettera.

Come nel primo caso si era voluto chiamare infinitamente piccolo solo ciò che era piú piccolo del finito, nel secondo caso si chiama infinito ciò che è al di là del finito. Ma né l'uno né l'altro rappresentano l'infinito, che pure è in gioco nel calcolo infinitesimale. In generale, infinito non è ciò che è aldilà del finito, ma ciò che *cessa* di essere finito, e che risulta quindi essere *quanto tolto,* cioè *quale.* L'infinità della nozione centrale del calcolo differenziale consiste nell'essere una « determinazione qualitativa ». Tale nozione fondamentale è infatti il « rapporto di una funzione potenziale e della funzione del suo sviluppo o potenziamento », cioè, semplificando, il rapporto di una funzione e della sua derivata prima [38]. Proprio in questo suo essere rapporto che coinvolge potenze va riconosciuta la sua natura di vero infinito matematico. Speculativamente infatti non è infinito ciò che è semplicemente non finito, ma ciò che viene riconosciuto come finito tolto o quanto tolto, venendo

[38] Si noti che questo rapporto è proprio la sottotangente cercata da Fermat, Barrows, Leibniz come primo problema di differenziazione.

positivamente assunto non piú come quanto ma come qualità. E tale è appunto un rapporto: in esso i quanti, come tali, spariscono. Addirittura, nel concetto di limite (che Hegel accetta come rappresentazione del concetto di rapporto di potenze definito sopra), non sono soltanto i lati del rapporto a sparire ma, come quanto, anche il rapporto stesso.

Della ricognizione storica va ricordata l'indicazione metodologica: la ricostruzione di una scienza positiva da parte della filosofia speculativa è qui proposta come indagine storico-concettuale, che esclude il riduzionismo tipico del formalismo; sebbene Hegel abbia adottato fondamentalmente l'impostazione di Lagrange, le varie « scoperte » o rappresentazioni precedenti vengono perciò viste come momenti di uno sviluppo e non come capitoli di una futura teoria o versioni abbozzate di nozioni appartenenti all'universo teorico prescelto.

La seconda Nota è stata compresa come realizzazione del progetto di fondare la determinazione concettuale dell'infinito matematico (il concetto centrale) mediante la sua applicazione. Una volta accettata la trattazione algebrica dell'infinito, si pone la questione del significato dei termini dello sviluppo in serie di potenze, e in particolare delle derivate di ordine superiore (cioè quelle « funzioni di sviluppo » o « funzioni del potenziamento » che Hegel preferisce ridefinire « funzioni del potenziarsi delle grandezze »). Il senso di queste viene ricondotto a quello dell'operazione di depotenziamento (differenziazione), che è geometrico, oppure fisico, come si è qui esemplificato riprendendo il metodo di Lagrange per la determinazione delle tangenti. In definitiva Hegel insiste sul fatto che il concetto è uno: il rapporto funzione-derivata; le derivate superiori non sono che il frutto dell'iterazione del procedimento di differenziazione e il senso della serie di potenze è squisitamente « applicativo », cioè extramatematico. Proprio in relazione alla necessità di questa integrazione dall'esterno, Hegel mette in luce il ruolo particolare del calcolo infinitesimale rispetto al resto della matematica. Il carattere qualitativo del concetto di rapporto tra funzione e derivata non è che il riflesso teorico, « logico » del suo contenuto. Esso, che dal punto di vista sistematico non è che applicazione, fu invece il punto di partenza, e consiste nel confronto e identificazione tra curva e retta, in geometria e in fisica. Il carattere qualitativo matematico è quindi giustificato dal carattere qualitativo extramatematico delle situazioni che il concetto analizza e risolve: la tesi di Hegel è che l'infinito non è fuori luogo in matematica, ma, al contrario, la matematica apre la via alla scienza dell'infinito, se tale si intenda il fenomeno fisico nella sua variabilità qualitativa. L'approccio speculativo consente dunque a Hegel di sottolineare come, al di là delle questioni indotte dalla « metafisica », la piena comprensione dei nodi concettuali del calcolo infinitesimale rimandi al riconoscimento del suo ruolo centrale nella costruzione della scienza matematica della natura.

GIOVANNA CIFOLETTI

SUMMARY

The Authoress analyzes the « Quantity » section of *Scienza della Logica* (Science of Logic), in which Hegel collects the major part of his ideas on mathematics, with particular regard to the infinitesimal calculus considering the developments such problems grew in the course of the last two centuries. Hegel enlarges upon a *conceptual* process, relative to the qualitative characteristic of a number of mathematical elements (rational number, function, differential ratio), and an *historical* process, relative to the development of the idea of infinity in the differential calculus. He underlines the centrality of the idea of the function and identification between an indefinite equation of a degree higher than the first one and a curve. Moreover he turns upside-down the problem of legitimating the treating of the infinity in the calculus by maintaining that just the « quanta taken away » are liable to be conceived in a ratio, contrary to the quanta « irrelated » by definition. The infinity is not beyond the finite, but it is what *ceases* to be finite, coming out to be *quantum taken away,* i.e. *which.* The speculative approach enables Hegel to underline how the full understanding of the conceptual knots of the infinitesimal calculus refers to the acknowledgment of its central rôle in the construction of the mathematical science of nature.